



# Analisi sismica di una struttura 3D Edifici Multipiano

## Sommario

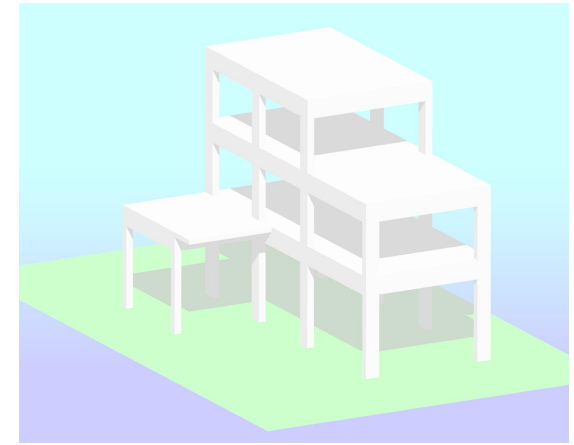
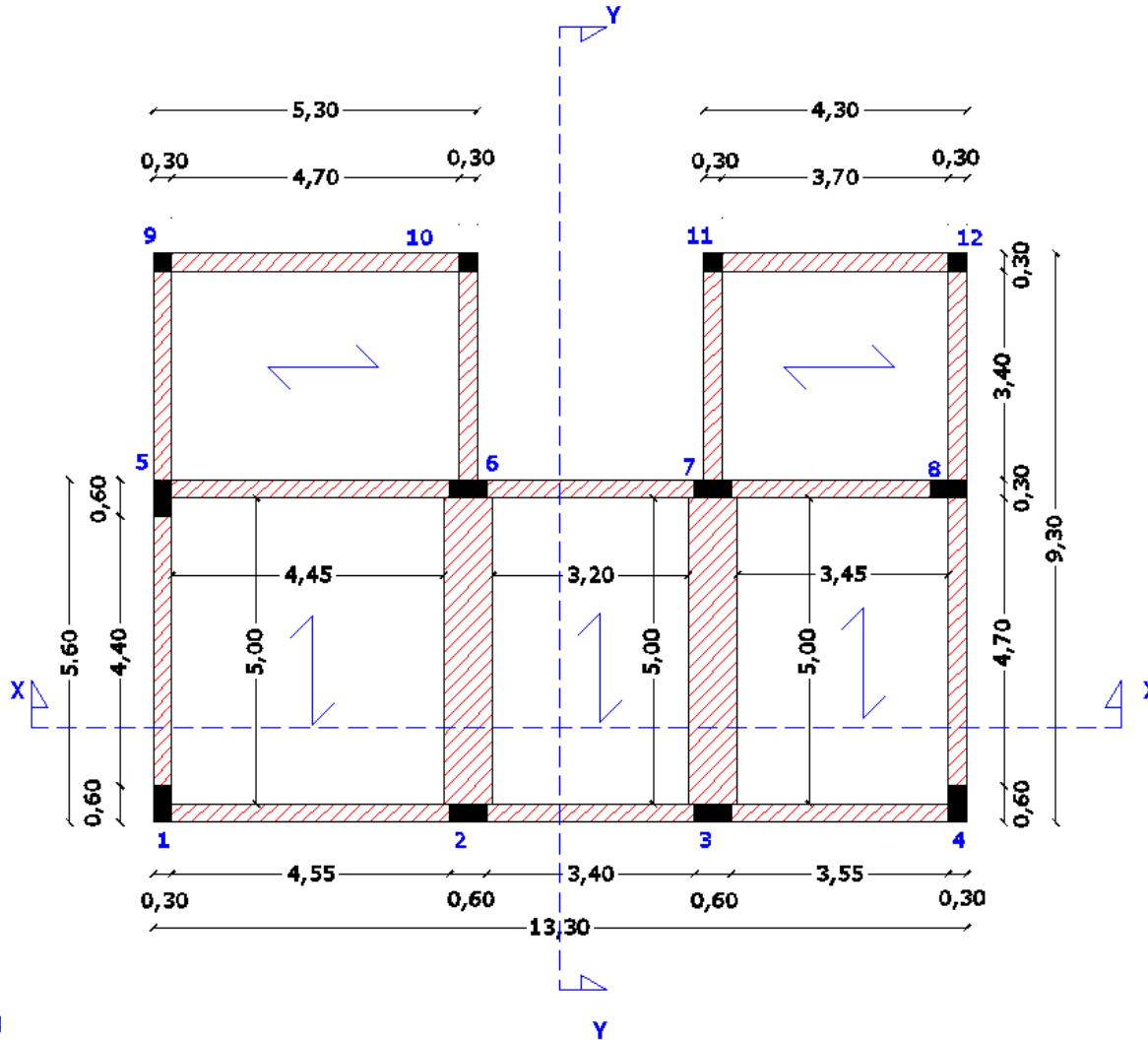


- 1. Descrizione geometrica della struttura;**
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.



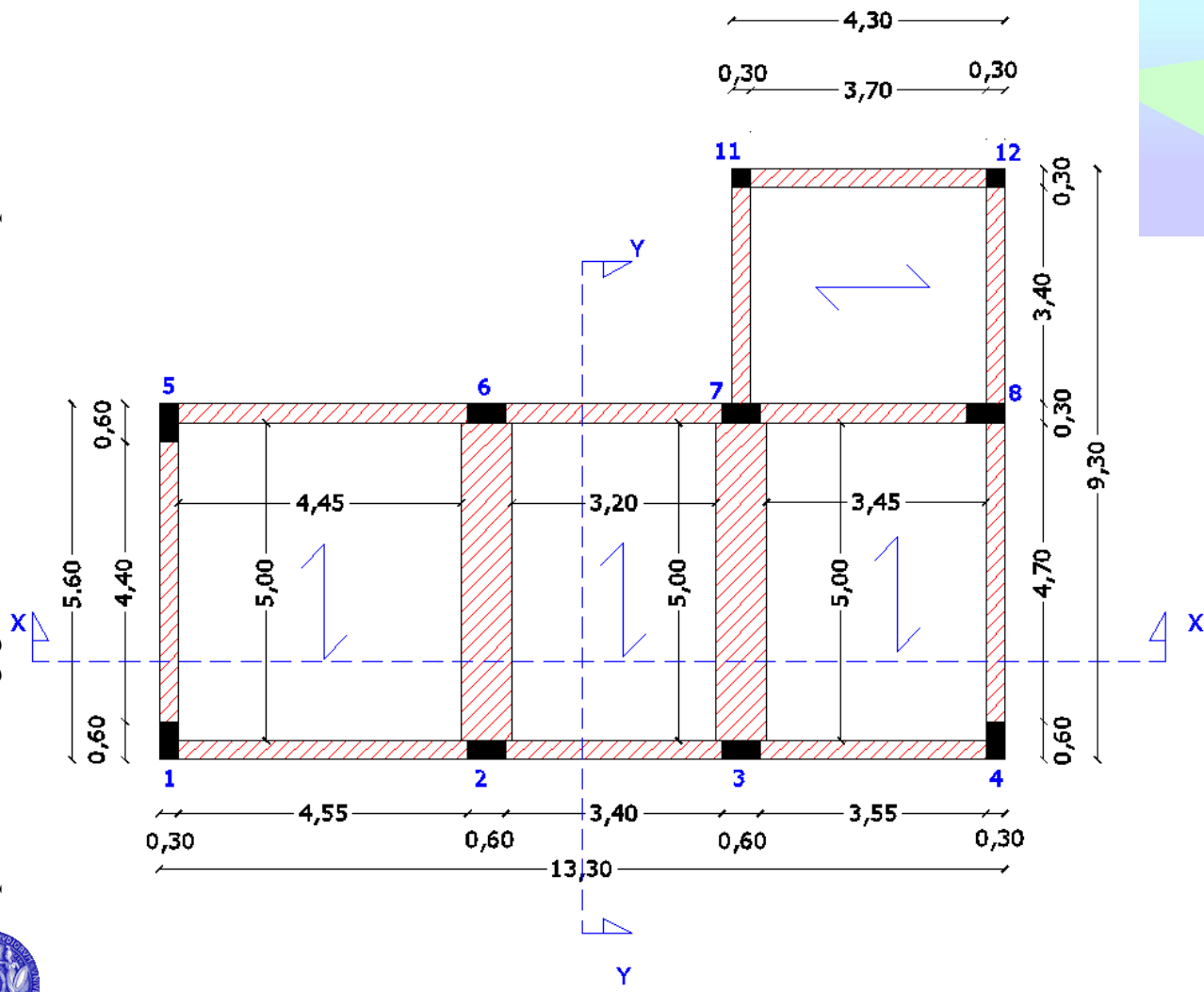
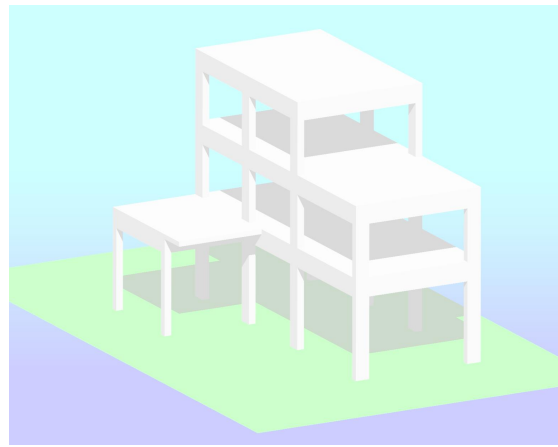
# Applicazione

## Pianta della carpenteria del primo livello



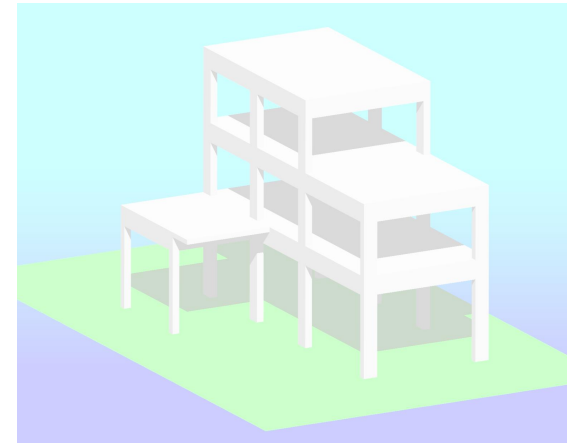
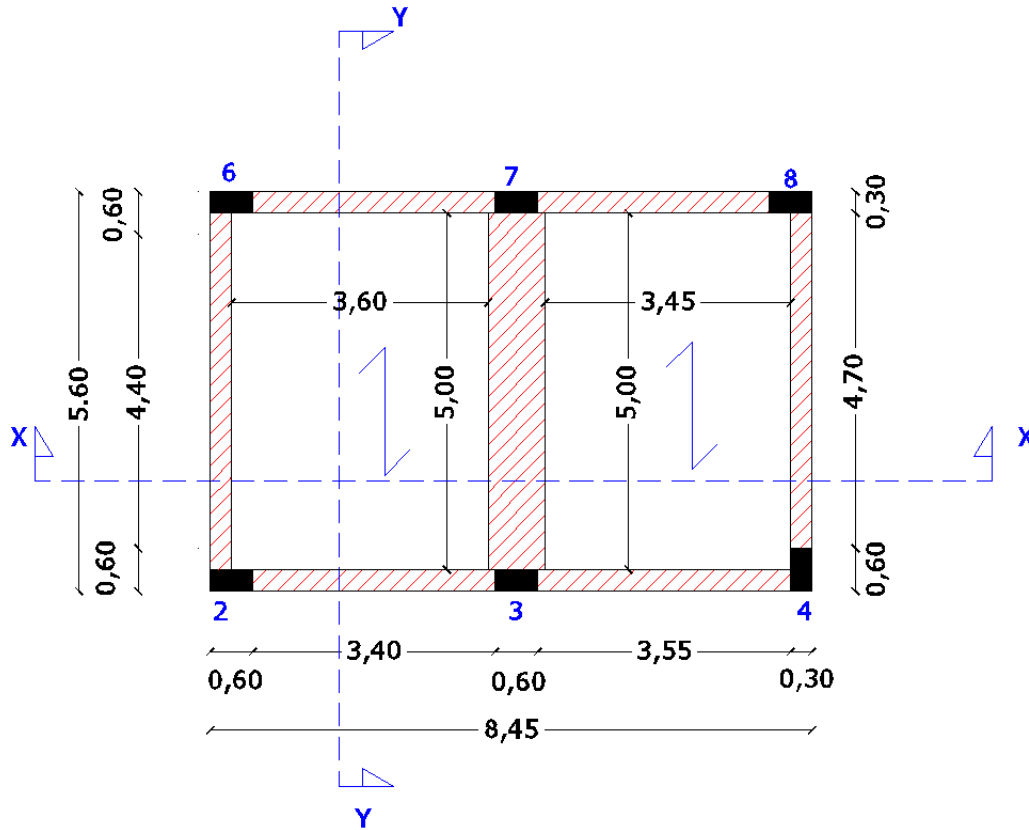
# Applicazione

## Pianta della carpenteria del secondo livello



# Applicazione

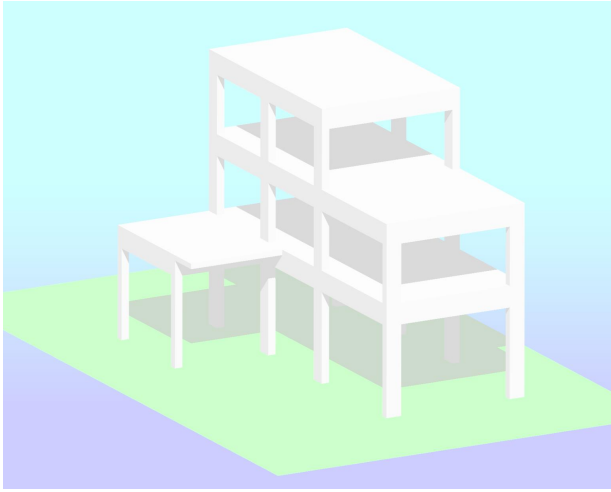
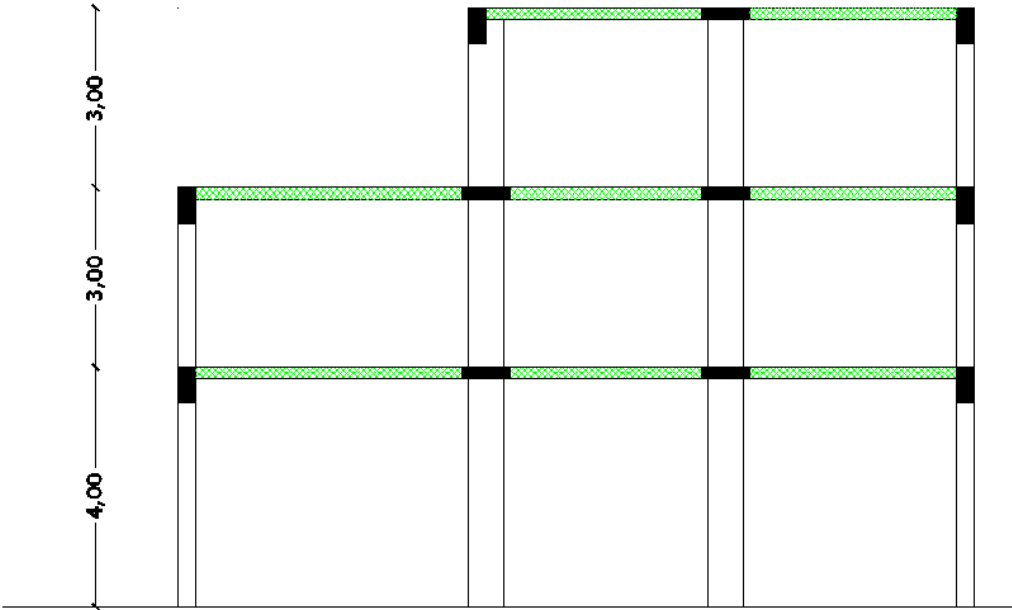
## Pianta della carpenteria del terzo livello





# Applicazione

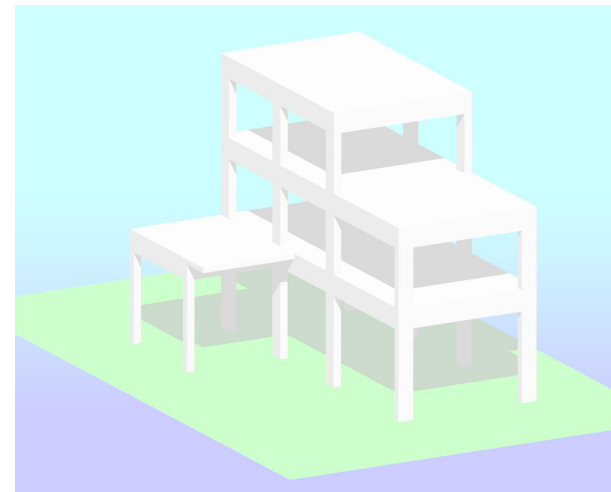
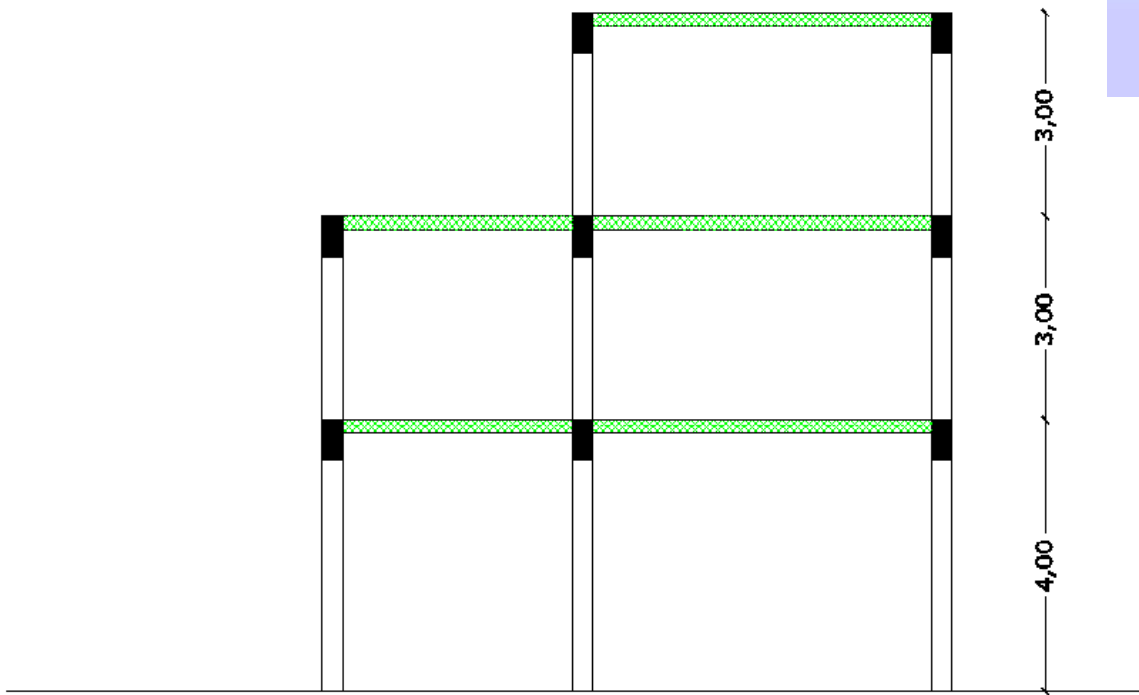
## Sezione longitudinale X-X





# Applicazione

## Sezione longitudinale Y-Y





## Sommario

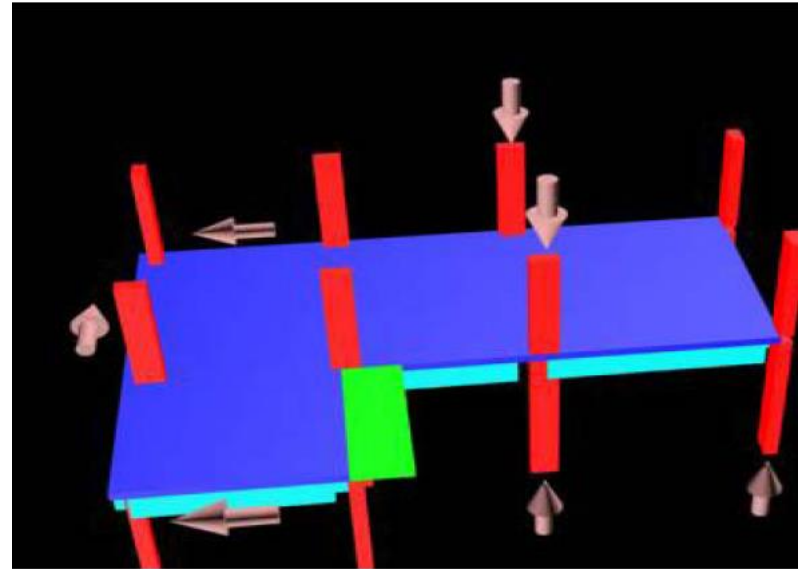


1. Descrizione geometrica della struttura;
- 2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;**
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.



# Le strutture 3D in zona sismica: Le ipotesi

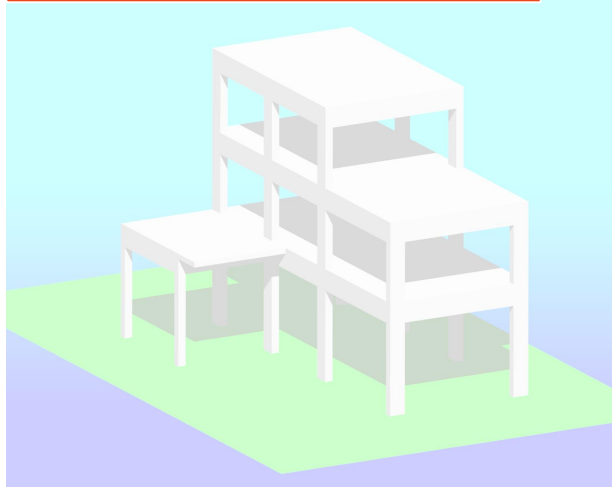
Il comportamento dinamico di strutture 3D viene descritto introducendo nel modello strutturale le seguenti ipotesi:



- i. Pilastri inestensibili;
- ii. Masse concentrate al livello dei solai (telai privi di massa);
- iii. Strutture costituite da impalcati infinitamente rigidi per forze agenti nel proprio piano
- iv. Solai infinitamente deformabili per forze perpendicolari al piano



# Analisi dei carichi



Masse associate ai carichi gravitazionali:  $G_1 + G_2 + \sum_j \psi_{2,j} Q_{jk}$

## Travi in c.a.o:

- 1) Trave 30x60 cm  $(25 \cdot 0.60 \cdot 0.30) = G_1: 4.5 \text{ kN/m};$
- 2) Trave 80x20 cm  $(25 \cdot 0.80 \cdot 0.20) = G_1: 4.0 \text{ kN/m};$

## Pilastrini in c.a.o:

- 1) Pilastrini 30x60 cm  $(25 \cdot 0.60 \cdot 0.30) = G_1: 4.5 \text{ kN/m};$
- 2) Pilastrini 30x30 cm  $(25 \cdot 0.30 \cdot 0.30) = G_1: 2.25 \text{ kN/m};$

### Solaio tipo in latero-cemento 16+4 cm.

Peso proprio  $G_1: 2.90 \text{ kN/mq};$   
 Carico permanente  $G_2: 2.80 \text{ kN/mq};$   
 Carico variabile (cat. A)  $Q_1: 2.00 \text{ kN/mq}; \psi_{21}=0.30$

Massa associata  $(2.90+2.80+0.30 \cdot 2.00) \cdot 1000/9.81 = 642 \text{ kg/mq}$

### Balcone in soletta piena 15 cm.

Peso proprio  $G_1: 3.75 \text{ kN/mq};$   
 Carico permanente  $G_2: 1.85 \text{ kN/mq};$   
 Carico variabile (cat. C)  $Q_1: 4.00 \text{ kN/mq}; \psi_{21}=0.60$

Massa associata  $(3.75+1.85+0.60 \cdot 4.00) \cdot 1000/9.81 = 816 \text{ kg/mq}$

### Solaio di copertura in latero-cemento 16+4 cm.

Peso proprio  $G_1: 2.90 \text{ kN/mq};$   
 Carico permanente  $G_2: 1.80 \text{ kN/mq};$   
 Carico variabile (cat. H)  $Q_1: 0.50 \text{ kN/mq}; \psi_{21}=0.00$

Massa associata  $(2.90+1.80+0.00 \cdot 0.50) \cdot 1000/9.81 = 479 \text{ kg/mq}$

### Tamponamenti in laterizio alleggerito

Spessore 25+5 cm; finestre 15%

Peso proprio  
 $(12 \text{ kN/mc} \cdot 0.25 \cdot 0.85) = G_1: 2.55 \text{ kN/mq}$

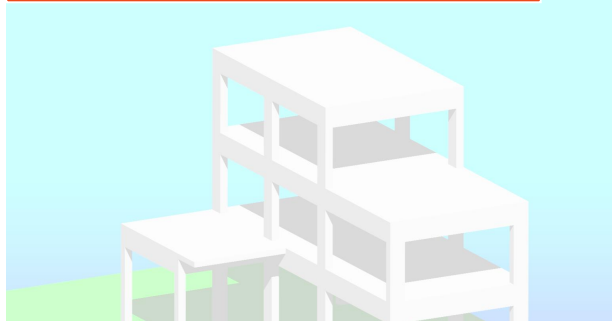
Carico permanente  
 $(21 \text{ kN/mc} \cdot 0.05 \cdot 0.85) = G_2: 0.8925 \text{ kN/mq};$

Massa associata  $(2.55+0.8925) \cdot 1000/9.81 = 351 \text{ kg/mq};$

**In altezza**



# Analisi dei carichi



Masse associate ai carichi gravitazionali:

$$G_1 + G_2 + \sum_j \psi_{2j} Q_{jk}$$

**Tabella 2.5.I** – Valori dei coefficienti di combinazione

Categoria/Azione variabile	$\Psi_{0j}$	$\Psi_{1j}$	$\Psi_{2j}$
Categoria A Ambienti ad uso residenziale	0,7	0,5	0,3
Categoria B Uffici	0,7	0,5	0,3
Categoria C Ambienti suscettibili di affollamento	0,7	0,7	0,6
Categoria D Ambienti ad uso commerciale	0,7	0,7	0,6
Categoria E Biblioteche, archivi, magazzini e ambienti ad uso industriale	1,0	0,9	0,8
Categoria F Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso $\leq 30$ kN)	0,7	0,7	0,6
Categoria G Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso $> 30$ kN)	0,7	0,5	0,3
Categoria H Coperture	0,0	0,0	0,0
Vento	0,6	0,2	0,0
Neve (a quota $\leq 1000$ m s.l.m.)	0,5	0,2	0,0
Neve (a quota $> 1000$ m s.l.m.)	0,7	0,5	0,2
Variazioni termiche	0,6	0,5	0,0



# Analisi dei carichi

Masse associate ai carichi gravitazionali:

$$G_1 + G_2 + \sum_j \psi_{2j} Q_{jk}$$

Dimensioni			Baricentro		Densità	Massa	Momenti Statici		Momenti di Inerzia		
Larghezza [m]	Spessore [m]	Altezza [m]	$dx_{gi}$	$dy_{gi}$	$\mu_i$ [kg/m <sup>2</sup> ]	$m_i$ [kg]	$S_x$ [kg m]	$S_y$ [kg m]	$I_x$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_y$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_o$ [kg m <sup>2</sup> ]
<b>Pilastri</b>											
<b>Travi</b>											
<b>Solai</b>											
<b>Tompagni</b>											
<b>Balcone</b>											

$$m_i = \mu_i A_i$$

$$S_{xi} = m_i dy_{gi}$$

$$I_{xi} = I_{xg} + m_i dy_{gi}^2$$

$$S_{yi} = m_i dx_{gi}$$

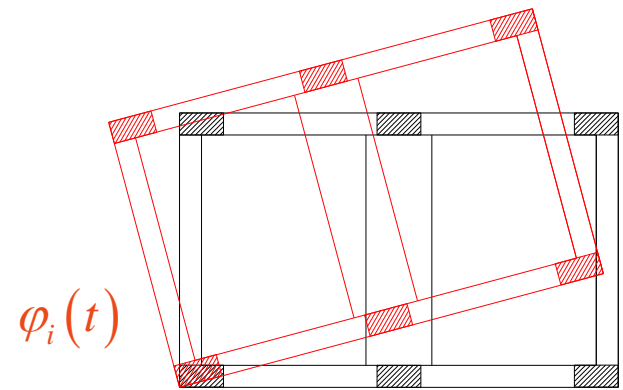
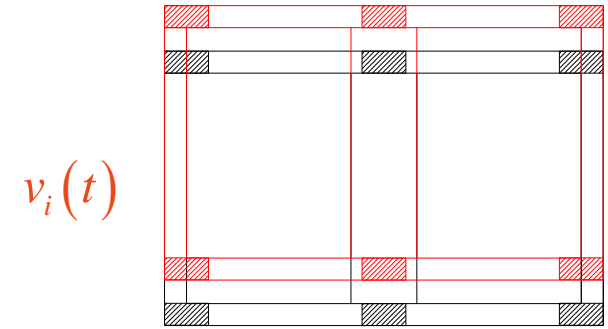
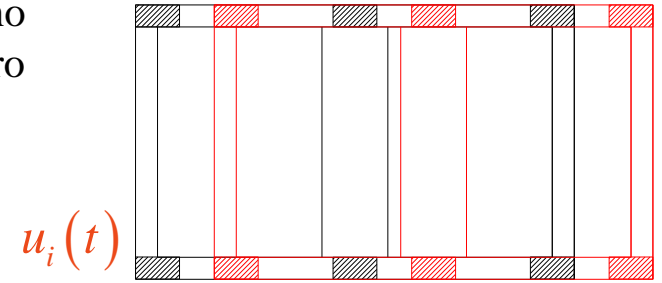
$$I_{yi} = I_{yg} + m_i dx_{gi}^2$$

# Scelta dei gradi di libertà

I gradi di libertà dinamicamente significativi vengono raccolti in un vettore di dimensione pari a tre volte il numero di piani (N)

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_N(t) \\ v_1(t) \\ \dots \\ v_N(t) \\ \varphi_1(t) \\ \dots \\ \varphi_N(t) \end{bmatrix}$$

} N spostamenti lungo x  
} N spostamenti lungo y  
} N rotazioni attorno a z



## Equazioni del moto (vibrazioni libere)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

Forze inerziali

Forze elastiche





## Sommario



1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
- 3. Costruzione della matrice delle masse;**
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.

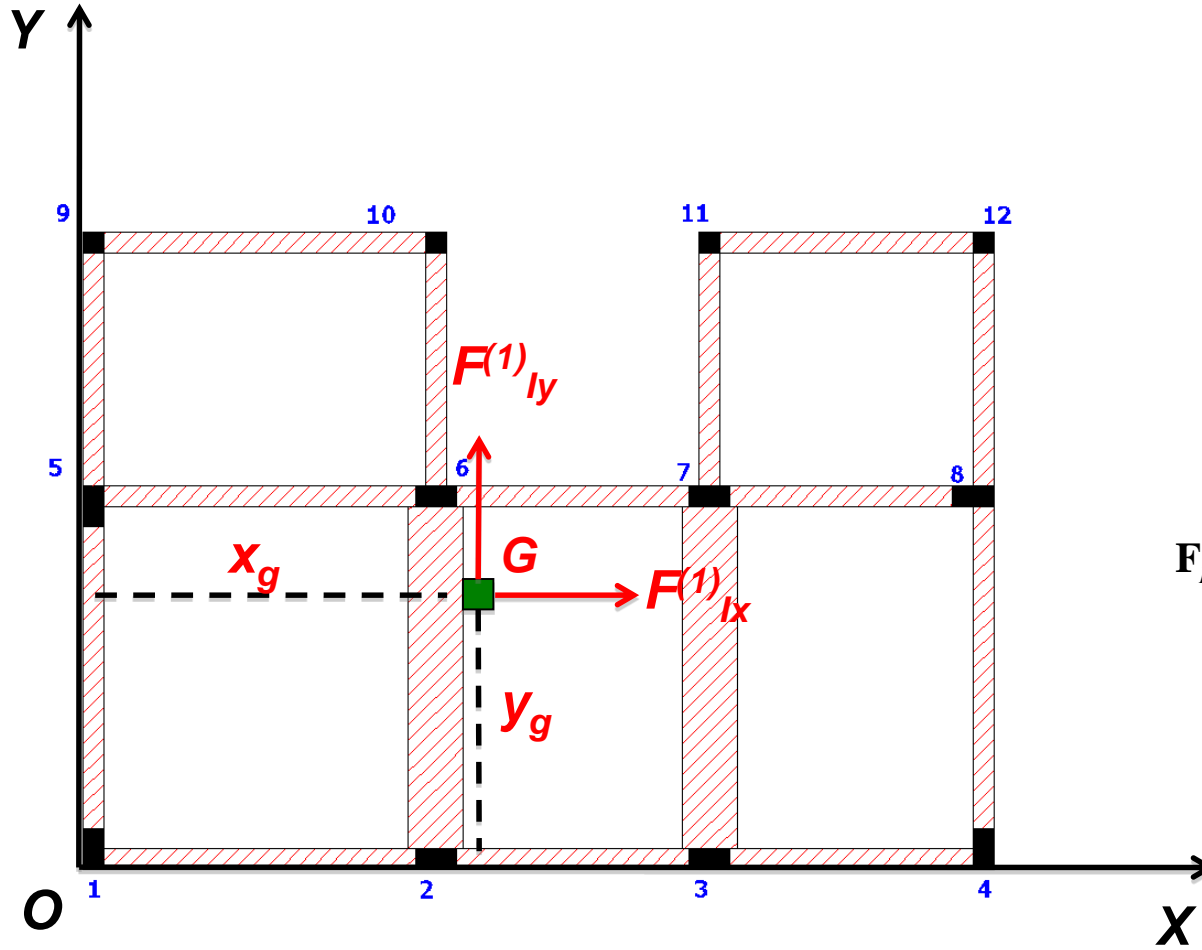


# Costruzione della matrice delle masse

Equazioni del moto (vibrazioni libere)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

Forze inerziali



$$\mathbf{F}_I(t) = \begin{bmatrix} F_{Ix}^{(1)}(t) \\ \dots \\ F_{Ix}^{(N)}(t) \\ F_{Iy}^{(1)}(t) \\ \dots \\ F_{Iy}^{(N)}(t) \\ M_{IO}^{(1)}(t) \\ \dots \\ M_{IO}^{(N)}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} F_{Ix}^{(1)}(t) \\ \dots \\ F_{Ix}^{(N)}(t) \end{matrix}} \right\} \mathbf{F}_{Ix}(t) \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} F_{Iy}^{(1)}(t) \\ \dots \\ F_{Iy}^{(N)}(t) \end{matrix}} \right\} \mathbf{F}_{Iy}(t) \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} M_{IO}^{(1)}(t) \\ \dots \\ M_{IO}^{(N)}(t) \end{matrix}} \right\} \mathbf{M}_{IO}(t) \end{matrix}$$

# Costruzione della matrice delle masse

Ogni massa diffusa sull'impalcato subisce una forza di inerzia proporzionale a se stessa e all'accelerazione impressa.

$$dF_{Ix}^{(i)} = \ddot{u}_p dm = (\ddot{u}_i - \ddot{\varphi}_i d_y) dm$$

$$dF_{Iy}^{(i)} = \ddot{v}_p dm = (\ddot{v}_i + \ddot{\varphi}_i d_x) dm$$

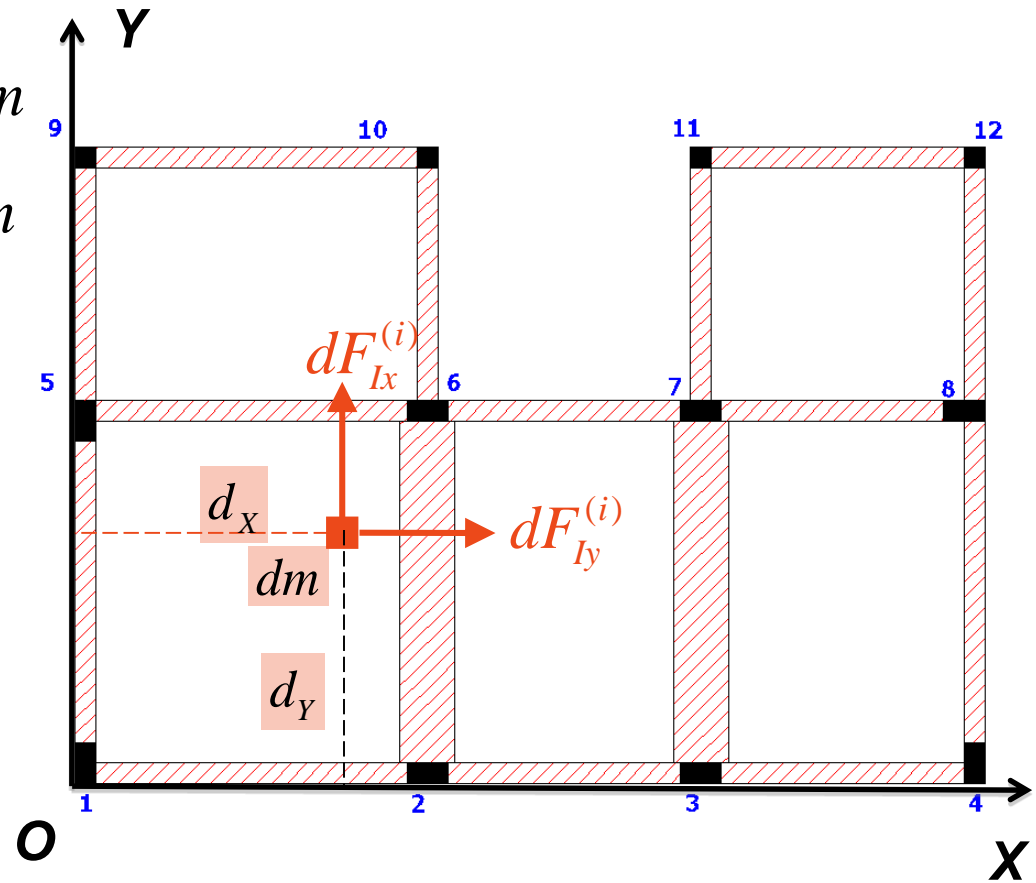
$$dM_{IO}^{(i)} = dF_{Ix}^{(i)} d_y - dF_{Iy}^{(i)} d_x$$

Forze d'inerzia

Piano rigido

$$u_p = u_i - \varphi_i d_y$$

$$v_p = v_i + \varphi_i d_x$$





# Costruzione della matrice delle masse

Forze di inerzia

$$dF_{Ix}^{(i)} = \ddot{u}_p dm = (\ddot{u}_i - \ddot{\varphi}_i d_y) dm$$

$$dF_{Iy}^{(i)} = \ddot{v}_p dm = (\ddot{v}_i + \ddot{\varphi}_i d_x) dm$$

$$dM_{IO}^{(i)} = dF_{Ix}^{(i)} d_y - dF_{Iy}^{(i)} d_x$$

Integrando su tutto l' i-simo impalcato:

$$F_{Ix}^{(i)} = M_i \ddot{u}_i - \ddot{\varphi}_i S_x^{(i)}$$

$$F_{Iy}^{(i)} = M_i \ddot{v}_i + \ddot{\varphi}_i S_y^{(i)}$$

$$M_{IO}^{(i)} = -\ddot{u}_i S_x^{(i)} + \ddot{v}_i S_y^{(i)} + \ddot{\varphi}_i I_O^{(i)}$$

Per tutti i piani in forma vettoriale:

$$\mathbf{F}_{Ix} = \mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{S}_x \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{F}_{Iy} = \mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}_y \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{M}_{IO} = -\mathbf{S}_x \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}_y \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{I}_O \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$$



# Costruzione della matrice delle masse

Equazioni del moto (vibrazioni libere)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

Forze di inerzia

$$\mathbf{F}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_t & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_t & \mathbf{S}_y \\ -\mathbf{S}_x & \mathbf{S}_y & \mathbf{I}_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{v}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} S_x^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_x^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_x^{(N)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} I_O^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_O^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_O^{(N)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} S_y^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_y^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_y^{(N)} \end{bmatrix}$$



## Sommario



1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
- 4. Costruzione della matrice di rigidezza;**
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.





# Costruzione della matrice di rigidità

Equazioni del moto (vibrazioni libere)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

Forze elastiche

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Ex}(t) \\ \mathbf{F}_{Ey}(t) \\ \mathbf{M}_{EO}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{x\varphi} \\ \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\varphi} \\ \mathbf{K}_{x\varphi} & \mathbf{K}_{y\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

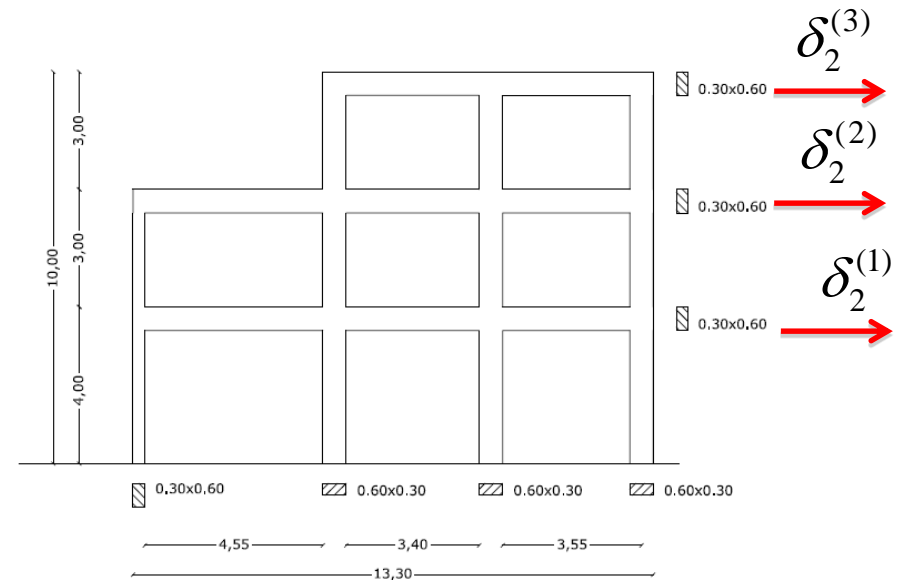
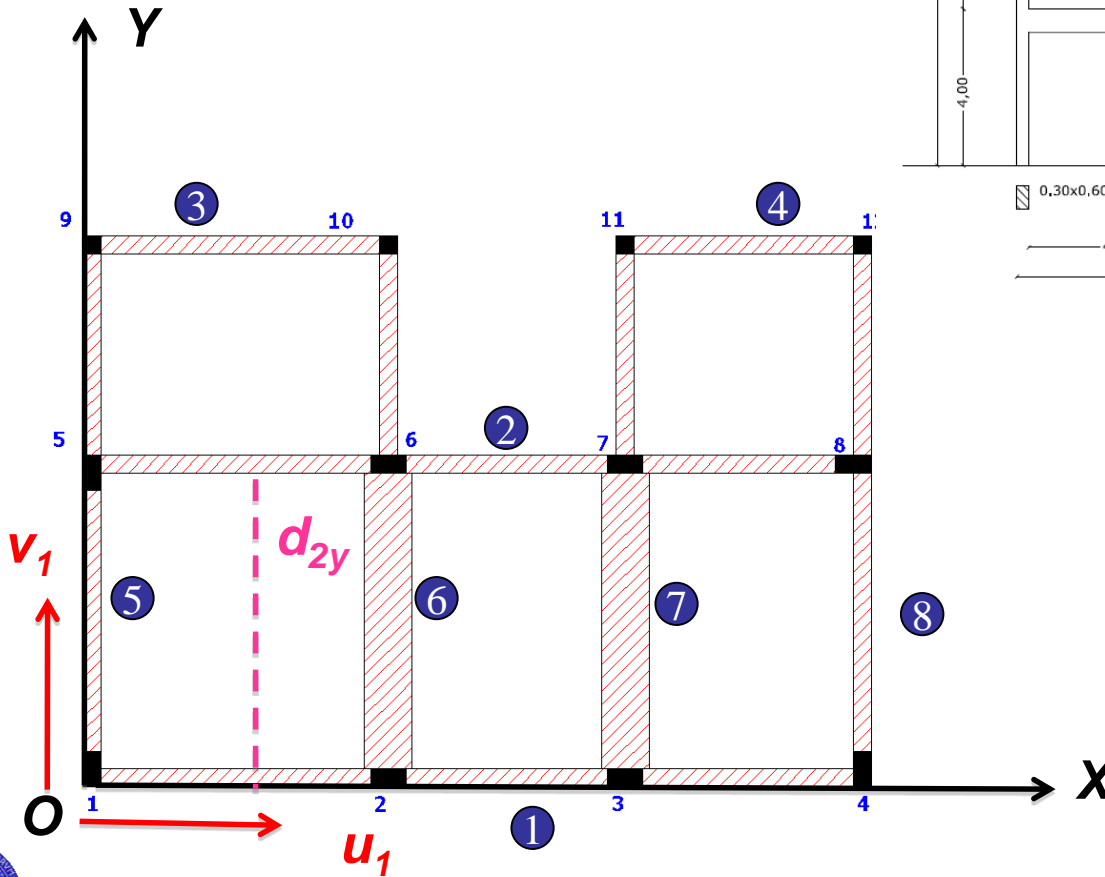
La matrice di rigidità  $\mathbf{K}$  è una matrice a blocchi  $N \times N$  ottenuta sommando le matrici di rigidità dei singoli telai piani che compongono la struttura

# Costruzione della matrice di rigidezza

## Primo impalcato

Telaio 2 lungo x (pilastri: 5-8)

$$\delta_2^{(1)} = u_1 - \varphi_1 d_{2y}$$



Altri telai

$$\delta_1^{(1)} = u_1$$

$$\delta_3^{(1)} = u_1 - \varphi_1 d_{3y}$$

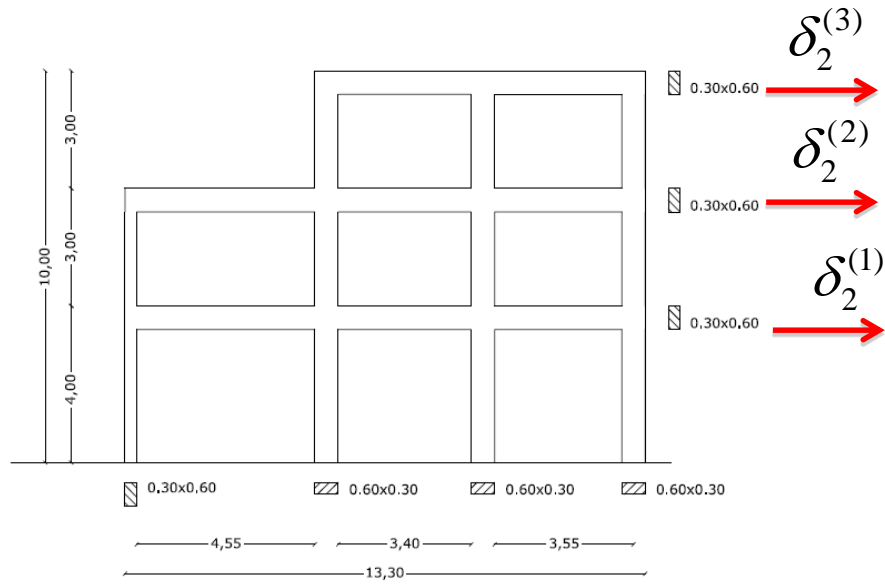
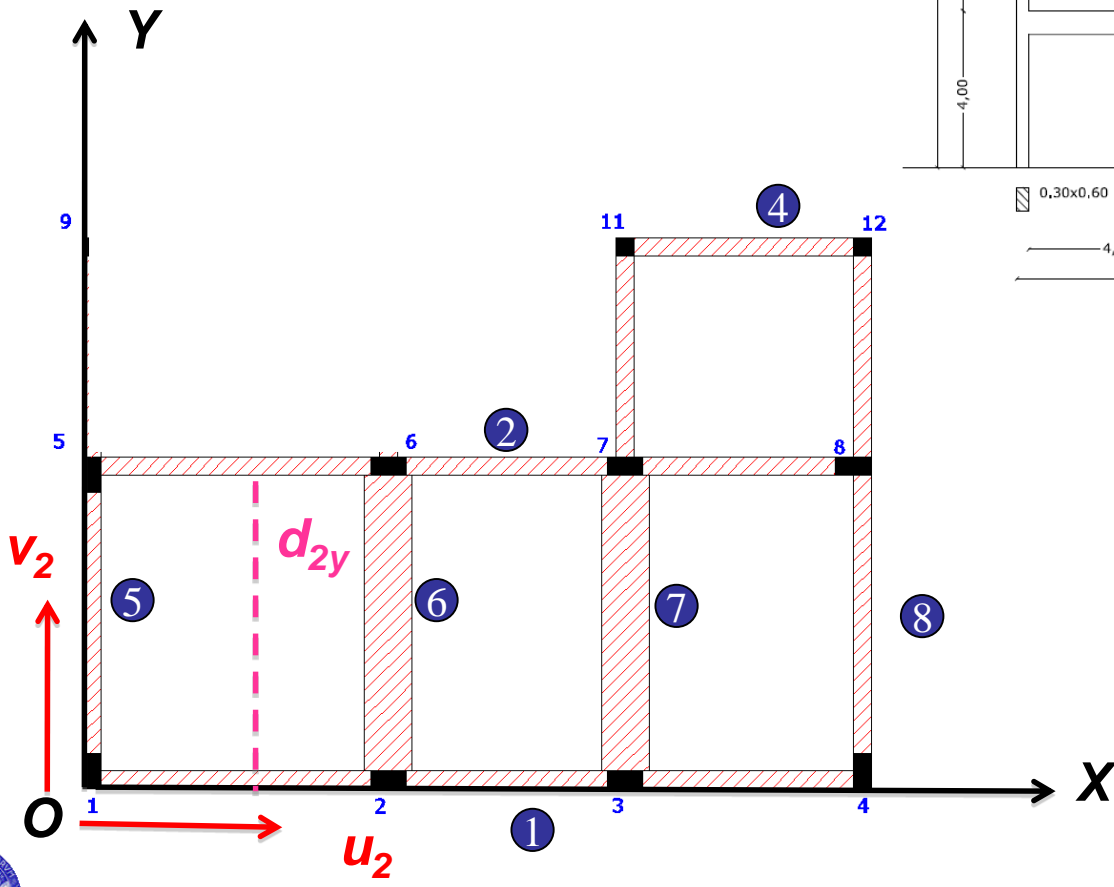


# Costruzione della matrice di rigidezza

## Secondo impalcato

Telaio 2 lungo x (pilastri: 5-8)

$$\delta_2^{(2)} = u_2 - \varphi_2 d_{2y}$$



Altri telai

$$\delta_1^{(2)} = u_2$$

$$\delta_3^{(2)} = u_2 - \varphi_2 d_{3y}$$

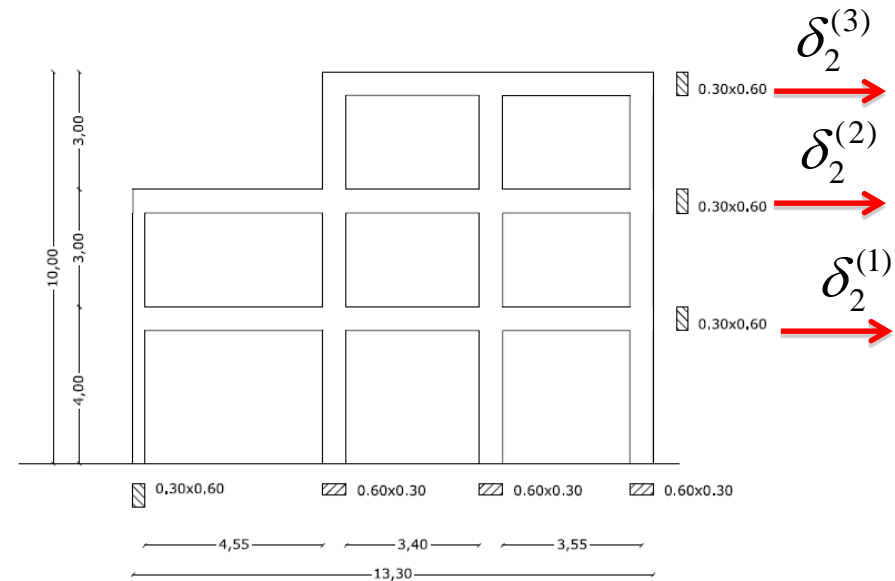
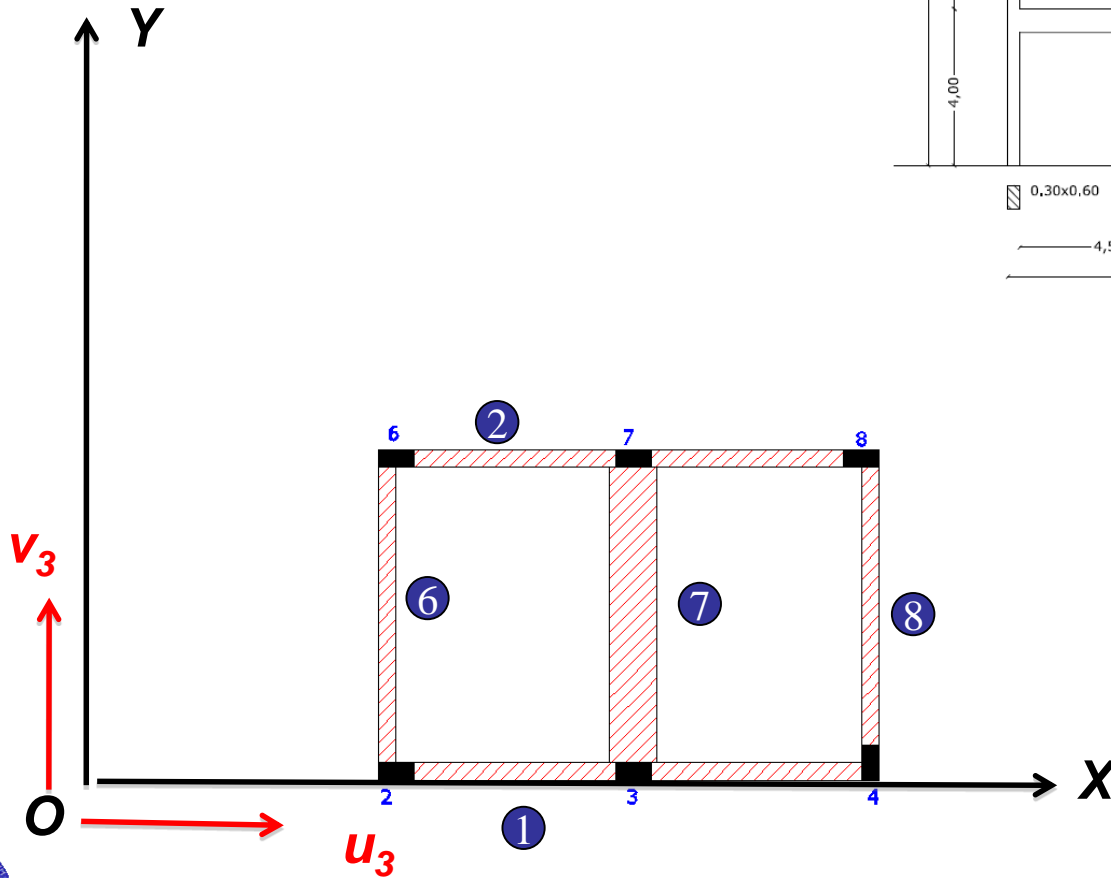


# Costruzione della matrice di rigidità

Terzo impalcato

Telaio 2 lungo x (pilastri: 5-8)

$$\delta_2^{(3)} = u_3 - \varphi_3 d_{2y}$$



Altri telai

$$\delta_1^{(3)} = u_3$$

$$\delta_3^{(3)} = u_3 - \varphi_3 d_{3y}$$





# Costruzione della matrice di rigidezza

## Riepilogo telai lungo x

Telaio n° 2 lungo x

$$\begin{cases} \delta_2^{(1)} = u_1 - \varphi_1 d_{2y} \\ \delta_2^{(2)} = u_2 - \varphi_2 d_{2y} \\ \delta_2^{(3)} = u_3 - \varphi_3 d_{2y} \end{cases} \Rightarrow$$

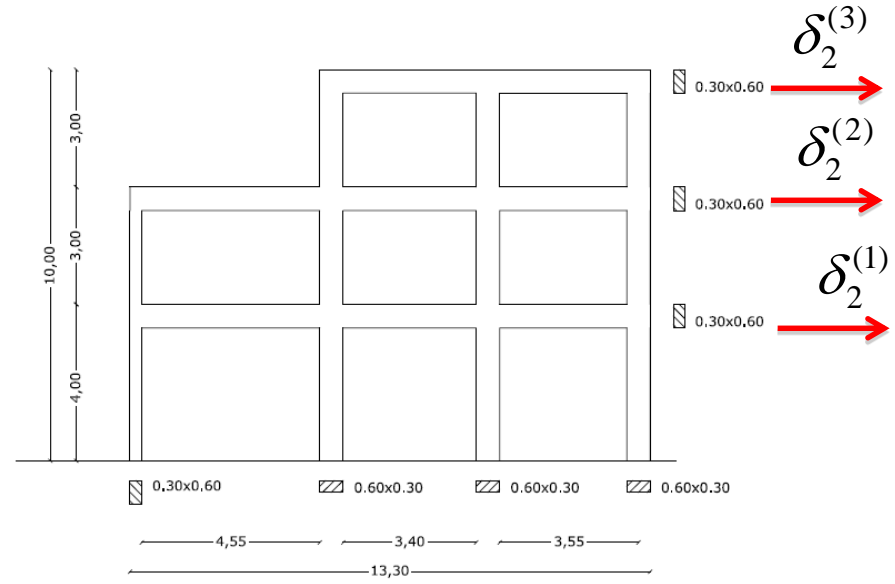
$$\delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_2^{(1)} \\ \delta_2^{(2)} \\ \delta_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} d_{2y} \Rightarrow \delta_2 = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} d_{2y}$$

**Segno negativo ( $d_y > 0$ )**

Altri telai

$$\delta_1 = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} d_{1y} \cong \mathbf{u}$$

$$\delta_3 = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} d_{3y}$$





# Costruzione della matrice di rigidezza

## Riepilogo telai lungo x

Telaio n° 2 lungo x

$$\mathbf{F}_{E2} = \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\delta}_2$$

$$\mathbf{M}_{E2} = -\mathbf{K}_2 \boldsymbol{\delta}_2 d_{2y}$$

Altri telai

$$\mathbf{F}_{E1} = \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\delta}_1$$

$$\mathbf{M}_{E1} = -\mathbf{K}_1 \boldsymbol{\delta}_1 d_{1y}$$

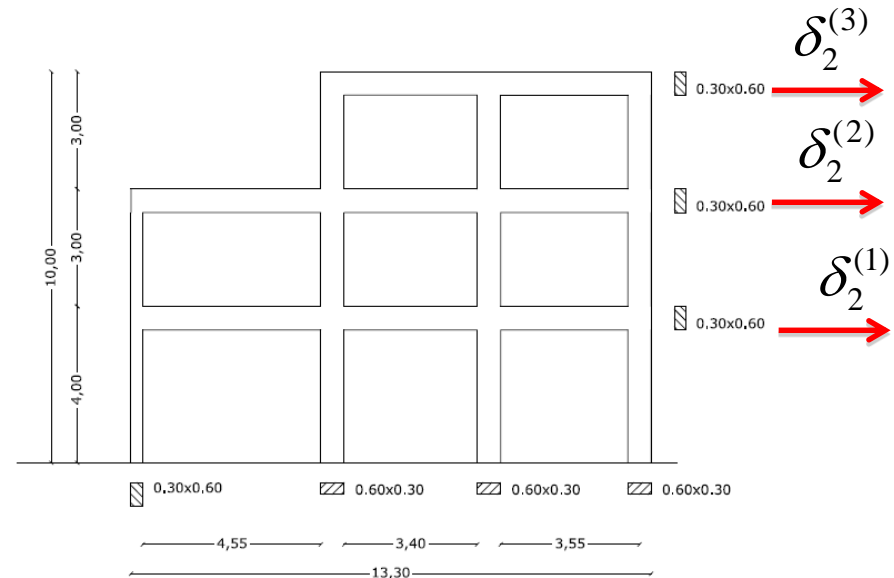
$$\mathbf{F}_{E3} = \mathbf{K}_3 \boldsymbol{\delta}_3$$

$$\mathbf{M}_{E3} = -\mathbf{K}_3 \boldsymbol{\delta}_3 d_{3y}$$

$$\mathbf{F}_{E4} = \mathbf{K}_4 \boldsymbol{\delta}_4$$

$$\mathbf{M}_{E4} = -\mathbf{K}_4 \boldsymbol{\delta}_4 d_{4y}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_2^{(1)} + k_2^{(2)} & -k_2^{(2)} & 0 \\ -k_2^{(2)} & k_2^{(2)} + k_2^{(3)} & -k_2^{(3)} \\ 0 & -k_2^{(3)} & k_2^{(3)} \end{bmatrix}$$



# Costruzione della matrice di rigidità

## Riepilogo telai lungo y

Telaio 5 lungo y (pilastri 1-9)

$$\mathbf{F}_{E5} = \mathbf{K}_5 \boldsymbol{\delta}_5 \quad \boldsymbol{\delta}_5 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{5x} \cong \mathbf{v}$$

$$\mathbf{M}_{E5} = \mathbf{K}_5 \boldsymbol{\delta}_5 d_{5x} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\delta}_6 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{6x}$$

$$\boldsymbol{\delta}_7 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{7x}$$

Altri telai

$$\boldsymbol{\delta}_8 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{8x}$$

$$\mathbf{F}_{E6} = \mathbf{K}_6 \boldsymbol{\delta}_6$$

$$\mathbf{M}_{E6} = \mathbf{K}_6 \boldsymbol{\delta}_6 d_{6x}$$

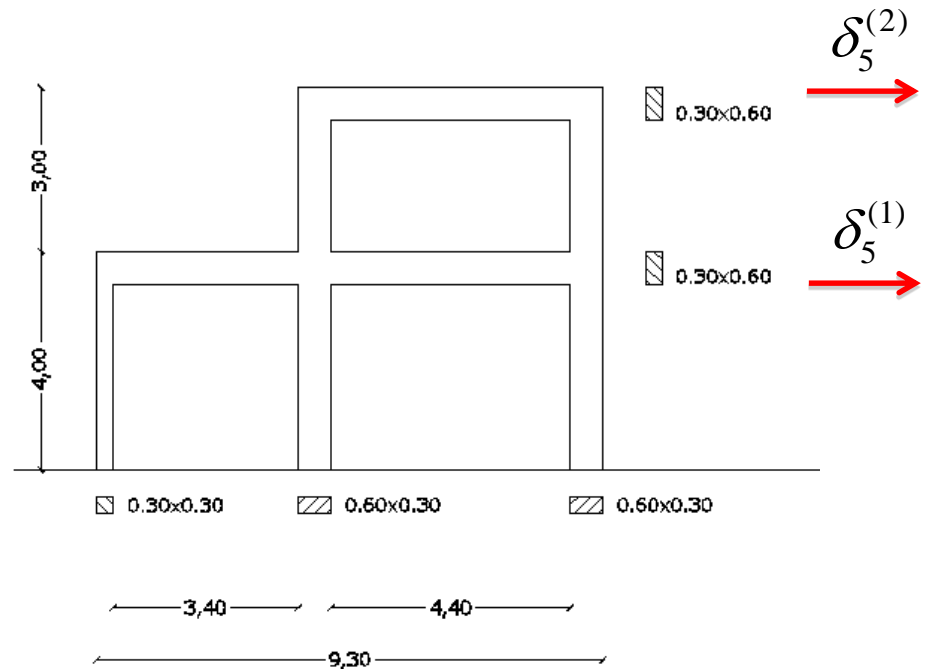
$$\mathbf{F}_{E7} = \mathbf{K}_7 \boldsymbol{\delta}_7$$

$$\mathbf{M}_{E7} = \mathbf{K}_7 \boldsymbol{\delta}_7 d_{7x}$$

$$\mathbf{F}_{E8} = \mathbf{K}_8 \boldsymbol{\delta}_8$$

$$\mathbf{M}_{E8} = \mathbf{K}_8 \boldsymbol{\delta}_8 d_{8x}$$

**Segno positivo ( $d_x > 0$ )**



# Costruzione della matrice di rigidità

## Risultante e momento risultante

Lungo x

$$\mathbf{F}_{Ex} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{F}_{Ej} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j \boldsymbol{\delta}_j = \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j (\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} d_{jy})$$

Lungo y

$$\mathbf{F}_{Ey} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{F}_{Ei} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j \boldsymbol{\delta}_j = \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j (\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{jx})$$

Momento risultante

$$\mathbf{M}_{EO} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{F}_{Ei} d_{jx} - \sum_{j=1}^4 \mathbf{F}_{Ei} d_{jy} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j (\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} d_{jx}) d_{jx} - \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j (\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} d_{jy}) d_{jy}$$





# Costruzione della matrice di rigidezza

## Risultante e momento risultante

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{KX}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Ex}(t) \\ \mathbf{F}_{Ey}(t) \\ \mathbf{M}_{EO}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{x\varphi} \\ \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\varphi} \\ \mathbf{K}_{x\varphi} & \mathbf{K}_{y\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_{x\varphi} = -\sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j d_{jy}$$

$$\mathbf{K}_{y\varphi} = \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j d_{jx}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_j (d_{jy})^2 + \sum_{j=5}^8 \mathbf{K}_j (d_{jx})^2$$



## Sommario



1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
- 5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;**
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.



# Il problema agli autovalori

Equazioni del moto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$$

I modi di vibrare della struttura si determinano in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione

$$\left(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \boldsymbol{\phi}_{(i)} = \mathbf{0}$$

pulsazione

autovettore

$$\boldsymbol{\phi}_{(i)} = \begin{bmatrix} \phi_{1(i)} \\ \dots \\ \phi_{N(i)} \\ \phi_{(N+1)(i)} \\ \dots \\ \phi_{(2N)(i)} \\ \phi_{(2N+1)(i)} \\ \dots \\ \phi_{(3N)(i)} \end{bmatrix}$$

} N spostamenti lungo X  
 } N spostamenti lungo Y  
 } N rotazioni attorno a Z

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_N(t) \\ v_1(t) \\ \dots \\ v_N(t) \\ \varphi_1(t) \\ \dots \\ \varphi_N(t) \end{bmatrix}$$



# Il problema agli autovalori

## Equazioni del moto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\mathbf{L}\ddot{u}_g$$

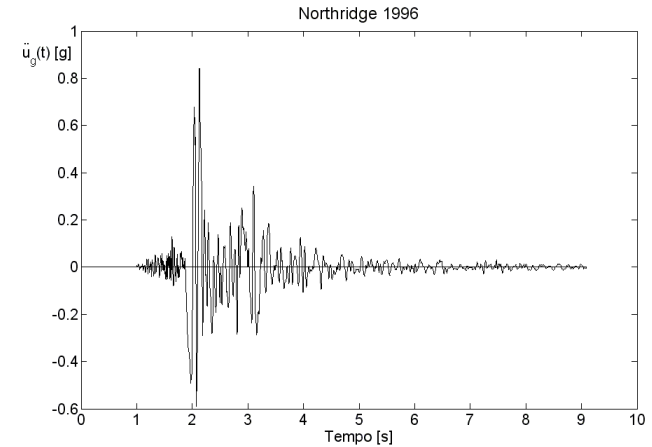
Sisma in direzione x

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Vettore di incidenza dell'accelerazione sismica che dipende dalla direzione del sisma

Sisma in direzione y

$$\mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{1}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$



## Trasformazione modale

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{Y}$$

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \Lambda \dot{\mathbf{Y}} + \Omega^2 \mathbf{Y} = \mathbf{P} \ddot{u}_g \longrightarrow \mathbf{P} = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{L}$$



Vettore dei coefficienti di partecipazione

Analisi modale con spettro di risposta



## Sommario

1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. **Determinazione dello Spettro di risposta elastico;**
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.





# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

## Consiglio Superiore Lavori Pubblici - Azioni sismiche - Spettri di risposta ver. 1.03

1) Definizione del sito:

**Norme Tecniche per  
le Costruzioni  
(D.M. 14/01/2008)**

<input type="radio"/> Ricerca per coordinate	LONGITUDINE 13.3366	LATITUDINE 38.1121
<input checked="" type="radio"/> Ricerca per comune	REGIONE Sicilia	PROVINCIA Palermo
		COMUNE Palermo

Elaborazioni grafiche  
Grafici spettri di risposta  
Variabilità dei parametri

Elaborazioni numeriche  
Tabella parametri

Nodi del reticolo intorno al sito

Reticolo di riferimento

Controllo sul reticolo

- Sito esterno al reticolo
- Interpolazione su 3 nodi
- Interpolazione corretta

La "Ricerca per comune" utilizza le coordinate ISTAT del comune per identificare il sito. Si sottolinea che all'interno del territorio comunale le azioni sismiche possono essere significativamente diverse da quelle così individuate e si consiglia, quindi, la "Ricerca per coordinate".

- $a_g$  accelerazione orizzontale massima al sito;  
 $F_o$  valore massimo del fattore di amplificazione dello spettro in accelerazione orizzontale.  
 $T_C^*$  periodo di inizio del tratto a velocità costante dello spettro in accelerazione orizzontale.

# Determinazione dello Spettro di risposta elastico



## 2) Strategia di progettazione:

TIPI DI COSTRUZIONE		Vita Nominale $V_N$ (in anni)
1	Opere provvisorie – Opere provvisionali - Strutture in fase costruttiva <sup>1</sup>	$\leq 10$
2	Opere ordinarie, ponti, opere infrastrutturali e dighe di dimensioni contenute o di importanza normale	$\geq 50$
3	Grandi opere, ponti, opere infrastrutturali e dighe di grandi dimensioni o di importanza strategica	$\geq 100$

*Classe I:* Costruzioni con presenza solo occasionale di persone, edifici agricoli.

*Classe II:* Costruzioni il cui uso preveda normali affollamenti, senza contenuti pericolosi per l'ambiente e senza funzioni pubbliche e sociali essenziali. Industrie con attività non pericolose per l'ambiente. Ponti, opere infrastrutturali, reti viarie non ricadenti in Classe d'uso *III* o in Classe d'uso *IV*, reti ferroviarie la cui interruzione non provochi situazioni di emergenza. Dighe il cui collasso non provochi conseguenze rilevanti.

*Classe III:* Costruzioni il cui uso preveda affollamenti significativi. Industrie con attività pericolose per l'ambiente. Reti viarie extraurbane non ricadenti in Classe d'uso *IV*. Ponti e reti ferroviarie la cui interruzione provochi situazioni di emergenza. Dighe rilevanti per le conseguenze di un loro eventuale collasso.

*Classe IV:* Costruzioni con funzioni pubbliche o strategiche importanti, anche con riferimento alla gestione della protezione civile in caso di calamità. Industrie con attività particolarmente pericolose per l'ambiente. Reti viarie di tipo A o B, di cui al D.M. 5 novembre 2001, n. 6792, "Norme funzionali e geometriche per la costruzione delle strade", e di tipo C quando appartenenti ad itinerari di collegamento tra capoluoghi di provincia non altresì serviti da strade di tipo A o B. Ponti e reti ferroviarie di importanza critica per il mantenimento delle vie di comunicazione, particolarmente dopo un evento sismico. Dighe connesse al funzionamento di acquedotti e a impianti di produzione di energia elettrica.

# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

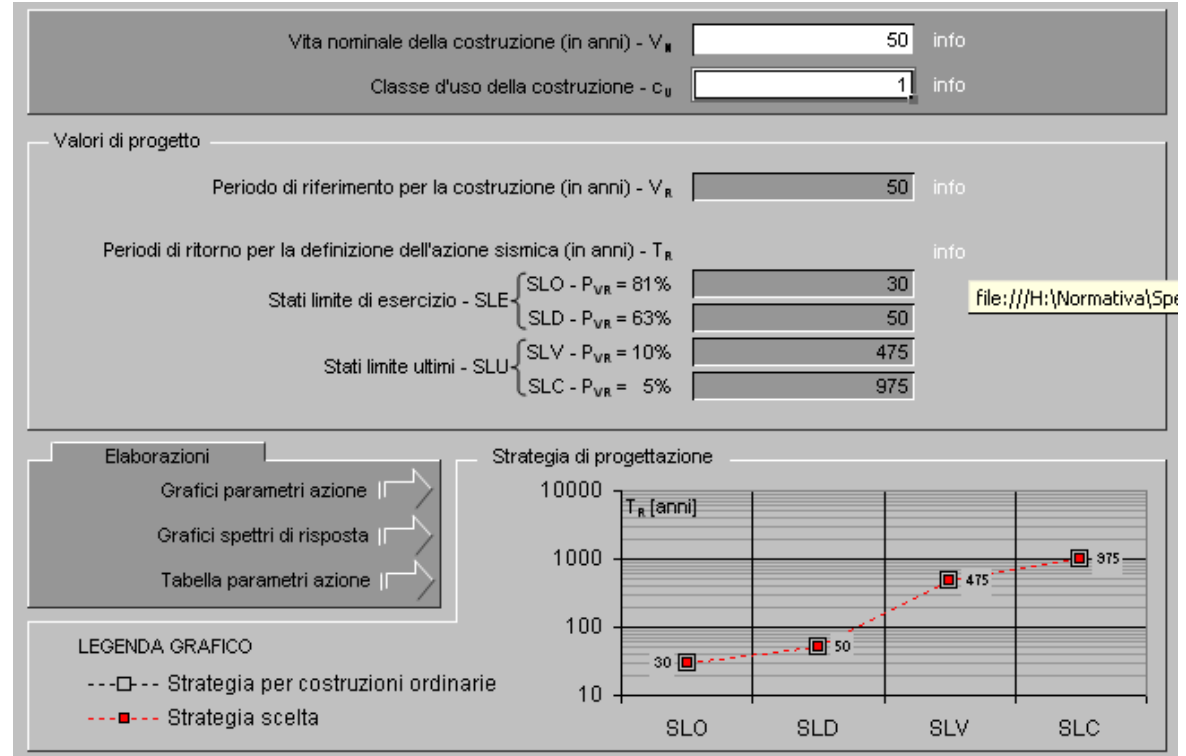
2) Strategia di progettazione:

$$a_g$$

$$F_0$$

$$T_C^*$$

per il tempo di ritorno scelto



# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

## 3) Determinazione dell'azione di progetto:

Categoria	Descrizione
A	<i>Ammassi rocciosi affioranti o terreni molto rigidi caratterizzati da valori di <math>V_{s,30}</math> superiori a 800 m/s, eventualmente comprendenti in superficie uno strato di alterazione, con spessore massimo pari a 3 m.</i>
B	<i>Rocce tenere e depositi di terreni a grana grossa molto addensati o terreni a grana fina molto consistenti con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di <math>V_{s,30}</math> compresi tra 360 m/s e 800 m/s (ovvero <math>N_{SPT,30} &gt; 50</math> nei terreni a grana grossa e <math>c_{u,30} &gt; 250</math> kPa nei terreni a grana fina).</i>
C	<i>Depositi di terreni a grana grossa mediamente addensati o terreni a grana fina mediamente consistenti con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di <math>V_{s,30}</math> compresi tra 180 m/s e 360 m/s (ovvero <math>15 &lt; N_{SPT,30} &lt; 50</math> nei terreni a grana grossa e <math>70 &lt; c_{u,30} &lt; 250</math> kPa nei terreni a grana fina).</i>
D	<i>Depositi di terreni a grana grossa scarsamente addensati o di terreni a grana fina scarsamente consistenti, con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di <math>V_{s,30}</math> inferiori a 180 m/s (ovvero <math>N_{SPT,30} &lt; 15</math> nei terreni a grana grossa e <math>c_{u,30} &lt; 70</math> kPa nei terreni a grana fina).</i>
E	<i>Terreni dei sottosuoli di tipo C o D per spessore non superiore a 20 m, posti sul substrato di riferimento (con <math>V_s &gt; 800</math> m/s).</i>



# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

3) Determinazione dell'azione di progetto:

Categoria sottosuolo	$S_s$	$C_c$
A	1,00	1,00
B	$1,00 \leq 1,40 - 0,40 \cdot F_0 \cdot \frac{a_{gg}}{\sigma_g} \leq 1,20$	$1,10 \cdot (T_C^*)^{-0,20}$
C	$1,00 \leq 1,70 - 0,60 \cdot F_0 \cdot \frac{a_{gg}}{\sigma_g} \leq 1,50$	$1,05 \cdot (T_C^*)^{-0,33}$
D	$0,90 \leq 2,40 - 1,50 \cdot F_0 \cdot \frac{a_{gg}}{\sigma_g} \leq 1,80$	$1,25 \cdot (T_C^*)^{-0,50}$
E	$1,00 \leq 2,00 - 1,10 \cdot F_0 \cdot \frac{a_{gg}}{\sigma_g} \leq 1,60$	$1,15 \cdot (T_C^*)^{-0,40}$

$$T_C = C_C \cdot T_C^*, \quad T_B = T_C / 3, \quad T_D = 4,0 \cdot \frac{a_{gg}}{\sigma_g} + 1,6$$

$$S = S_S \cdot S_T,$$



# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

3) Determinazione dell'azione di progetto:

$$0 \leq T < T_B \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_o \cdot \left[ \frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta \cdot F_o} \left( 1 - \frac{T}{T_B} \right) \right]$$

$$T_B \leq T < T_C \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_o$$

$$T_C \leq T < T_D \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_o \cdot \left( \frac{T_C}{T} \right)$$

$$T_D \leq T \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_o \cdot \left( \frac{T_C T_D}{T^2} \right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \zeta}} \geq 0.55$$



# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

3) Determinazione dell'azione di progetto:

## Parametri indipendenti

STATO LIMITE	SLV
$a_g$	0.176 g
$F_o$	2.377
$T_C^*$	0.290 s
$S_s$	1.448
$C_C$	1.580
$S_T$	1.000
$q$	1.000

## Parametri dipendenti

$S$	1.448
$\gamma$	1.000
$T_B$	0.153 s
$T_C$	0.458 s
$T_D$	2.306 s

## Espressioni dei parametri dipendenti

$$S = S_s \cdot S_T \quad (\text{NTC-07 Eq. 3.2.5})$$

$$\eta = \sqrt{10/(S+\xi)} \geq 0,55; \eta = 1/q \quad (\text{NTC-07 Eq. 3.2.6; §. 3.2.3.5})$$

$$T_B = T_C / 3 \quad (\text{NTC-07 Eq. 3.2.7})$$

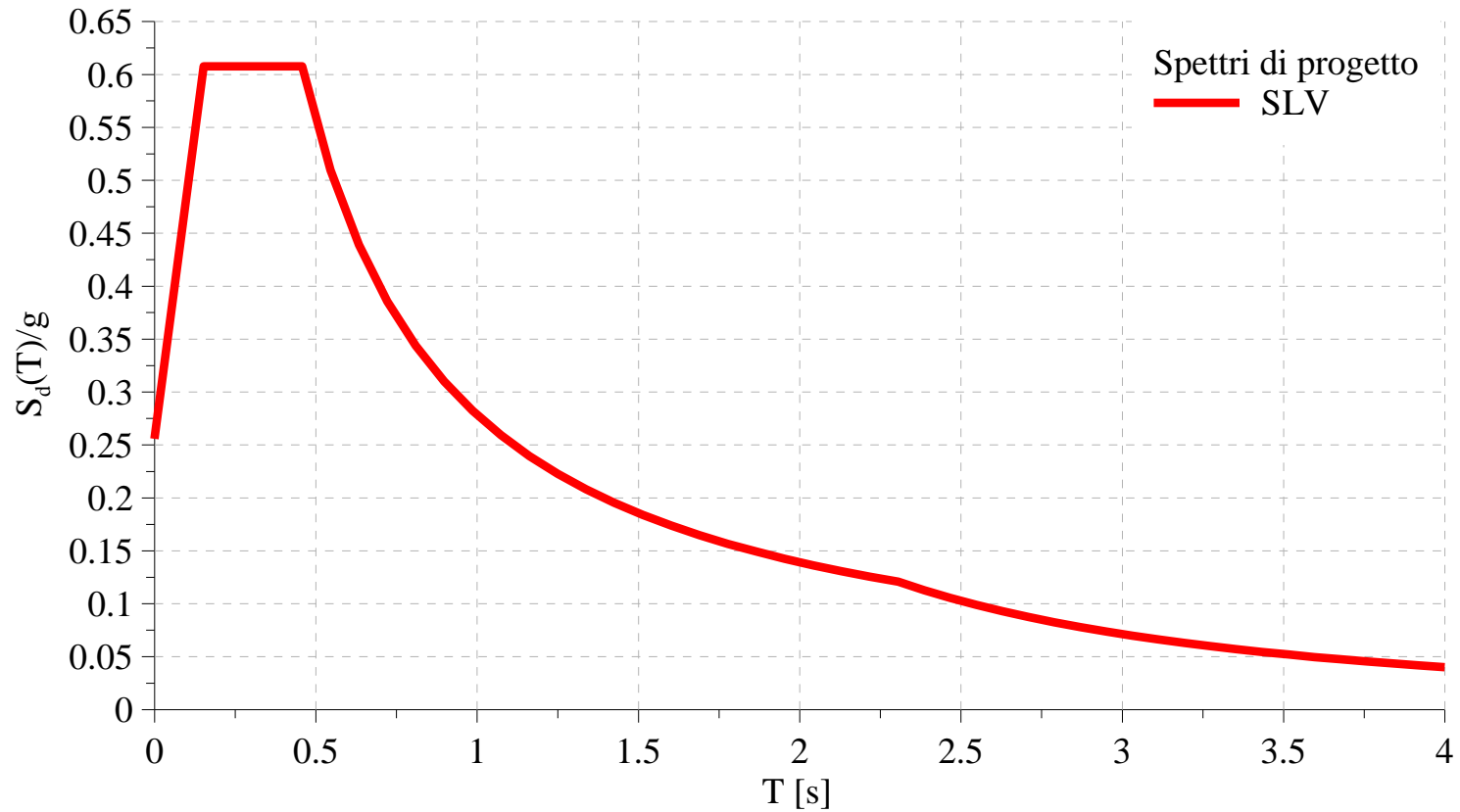
$$T_C = C_C \cdot T_C^* \quad (\text{NTC-07 Eq. 3.2.8})$$

$$T_D = 4,0 \cdot a_g / g + 1,6 \quad (\text{NTC-07 Eq. 3.2.9})$$



# Determinazione dello Spettro di risposta elastico

3) Determinazione dell' azione di progetto:





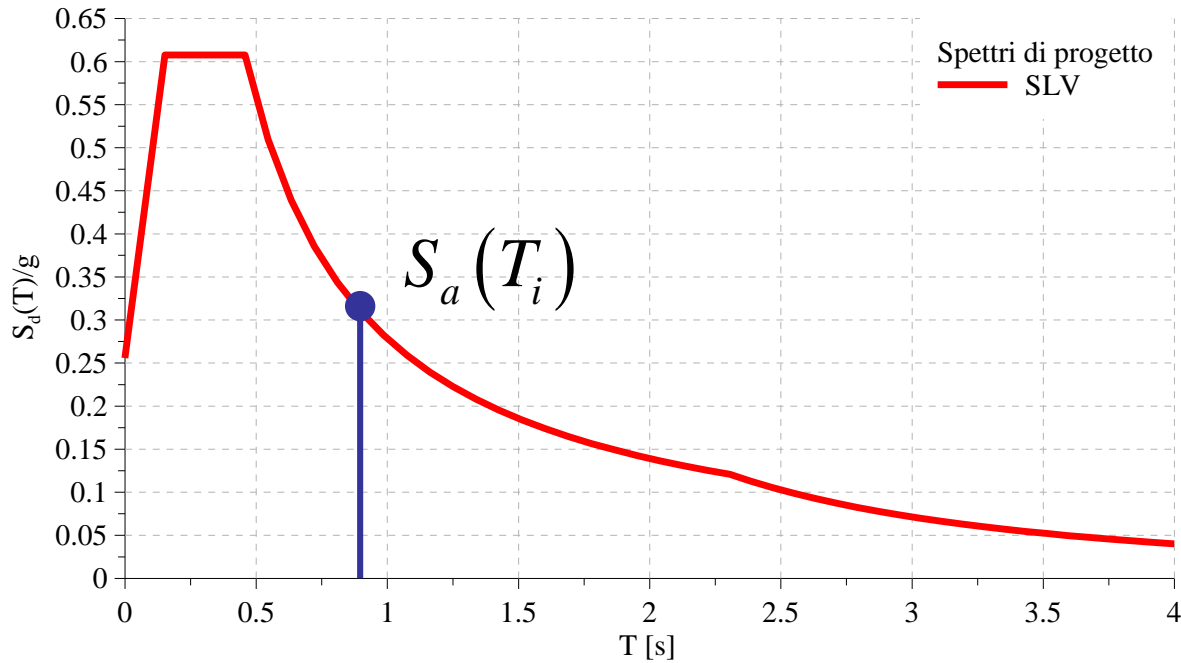


## Sommario



1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
- 7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;**
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.

# Valutazione degli spostamenti modali massimi



$$\left| y_{(i)} \right|_{\max} = \left( \frac{T_i}{2\pi} \right)^2 S_a(T_i) g p_{(i)}$$

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}; \quad p_{(i)} = \phi_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{L}$$



## Sommario

1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
- 8. Calcolo delle risposte modali massime;**
9. Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.





# Calcolo delle risposte modali massime

**Modo *i*-esimo**

$$\mathbf{X}_{(i)} = \phi_{(i)} \left| \mathbf{y}_{(i)} \right|_{\max}$$

$$\mathbf{X}_{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{v}_{(3 \times 1)} \\ \phi_{(3 \times 1)} \end{bmatrix}$$

**Spostamento del telaio *j* lungo *x* per il modo *i*-esimo**

$$\delta_{j,(i)} = \mathbf{u}_{(i)} - \phi_{(i)} d_{jy}$$

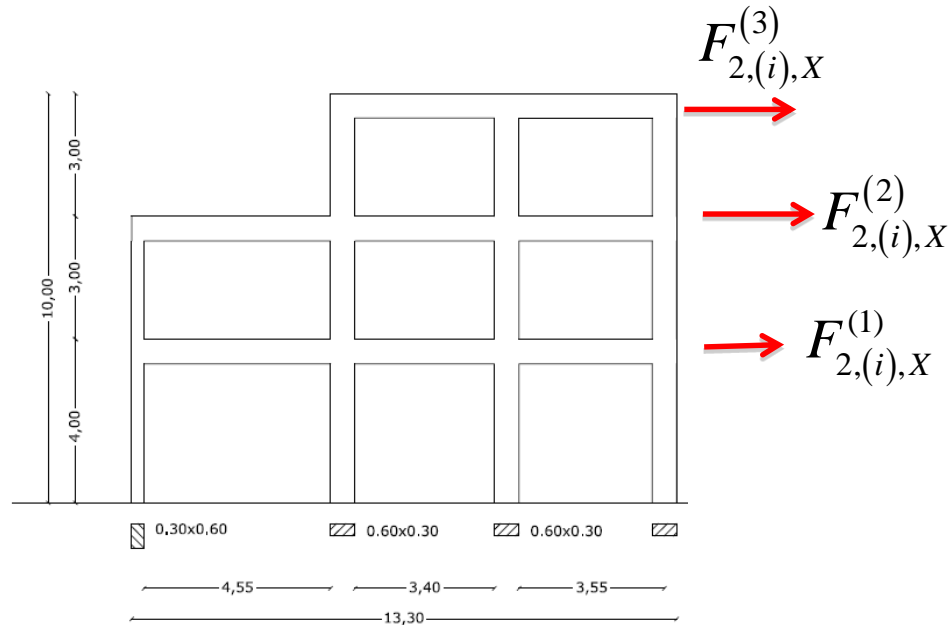
**Spostamento del telaio *j* lungo *y* per il modo *i*-esimo**

$$\delta_{j,(i)} = \mathbf{v}_{(i)} + \phi_{(i)} d_{jx}$$

**Forze di richiamo elastico del telaio *j* per il modo *i*-esimo**

$$\mathbf{F}_{j,(i),X} = \mathbf{K}_j \delta_{j,(i)}$$

**Ripetere dal punto 7 per sisma in dir. Y**





## Sommario

1. Descrizione geometrica della struttura;
2. Ipotesi, analisi dei carichi e scelta dei gradi di libertà;
3. Costruzione della matrice delle masse;
4. Costruzione della matrice di rigidità;
5. Il problema agli autovalori: pulsazioni e modi di vibrare, calcolo dei fattori di partecipazione;
6. Determinazione dello Spettro di risposta elastico;
7. Valutazione degli spostamenti modali massimi;
8. Calcolo delle risposte modali massime;
9. **Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.**





# Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.

## Combinazioni modali

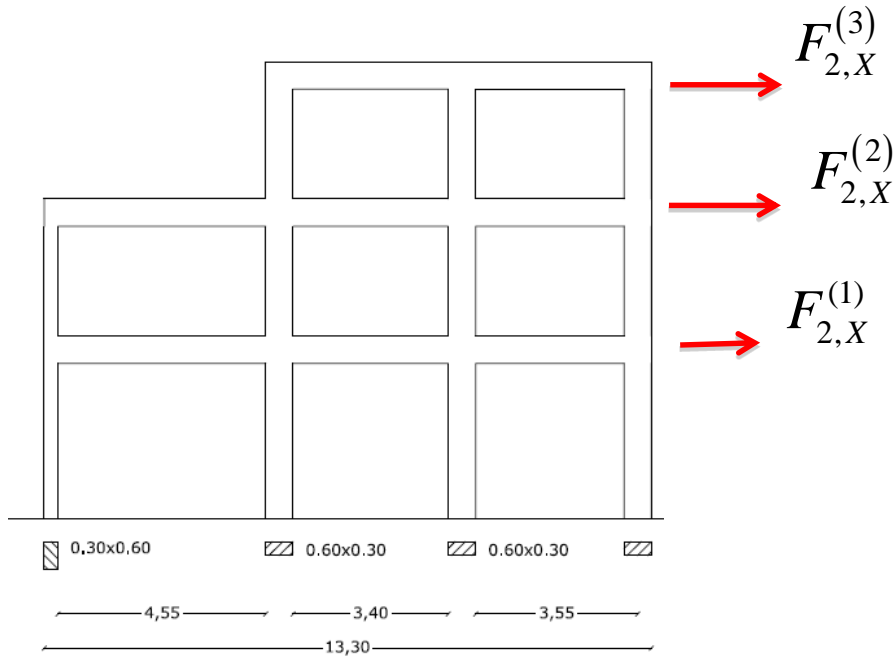
SRSS (Square Root of Sum of Square) - *Se tutti i periodi differiscono tra loro almeno del 10%*

$$F_{j,X} = \sqrt{\sum_{i=1}^9 F_{j,(i),X}^2}$$

$$F_{j,Y} = \sqrt{\sum_{i=1}^9 F_{j,(i),Y}^2}$$

## Combinazioni spaziali

$$F_{j,d} = \sqrt{F_{j,X}^2 + F_{j,Y}^2}$$





# Calcolo degli spostamenti e delle sollecitazioni sulla struttura utilizzando le regole di combinazione modale.

## Calcolo delle Sollecitazioni

$$F_{j,d} = \sqrt{F_{j,X}^2 + F_{j,Y}^2}$$

$$V_k^{(i)} = \frac{I_k^i}{\sum_{k=1}^{n_{\text{pilastri}}} I_k^{(i)}} \sum_{j=i}^{n_{\text{piani}}} F_{j,d}^{(k)}$$

$$M_k^{(i)} = V_k^{(i)} \frac{h_k^{(i)}}{2}$$

