Elementi di Logica Matematica

Gianluigi Oliveri
University of Palermo
gianluigi.oliveri@unipa.it

October 19, 2014

Contents

Chapter 1

Coerenza e validità

1.1 Introduzione

Il problema dal quale ha avuto origine la logica matematica è stato il seguente:

É possibile proporre un'approccio matematico allo studio del **pensiero deduttivo**?

e cioè, per esempio, ad argomentazioni quali la seguente:

Esempio 1.1.1 *:*

(A_1)	Tutti gli uomini sono mortali
(A_2)	Socrate è un uomo
$\therefore$	
(C)	Socrate è mortale

Figure 1.1: Sillogismo 1

È importante notare che non esistono soltanto gli argomenti corretti. Infatti, gli argomenti contenuti nei due esempi seguenti non lo sono.

Esempio 1.1.2 *Fumare rilassa e, quindi, fumare fa bene.*

Esempio 1.1.3 *Il* 7 *non è uscito neanche una volta nelle ultime* 30 *settimane, mentre il* 4 *è uscito la settimana scorsa. Quindi, la probabilità che la prossima settimana esca il* 7 *è maggiore di quella che esca di nuovo il* 4.

Nota Bene 1.1.1 *La correttezza dell'argomento dato nell'***Esempio 1.1.1** *può essere giustificata dal diagramma di Venn in* Fig. 1.2.

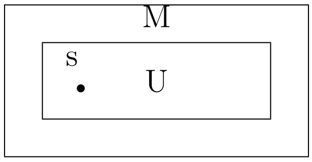

Figure 1.2: Diagramma di Venn del sillogismo 1

Dato il ruolo assolutamente centrale che ha il pensiero deduttivo nella nostra cultura—in matematica, per esempio—e la natura nefasta degli argomenti non validi (vedi, oltre agli **Esempi 1.1.2** e **1.1.3**, le dispute di Socrate contro i Sofisti sugli argomenti più vari) se ne ricava la grande importanza del problema da cui ha avuto origine la logica matematica.

Due delle questioni centrali che motivarono lo studio della logica matematica agli inizi del suo sviluppo furono:

1. cosa rende corretti (**validi**) argomenti come quello dell'**Esempio 1.1.1**? o (in modo equivalente): cosa fa sí che proposizioni come (C) **seguano logicamente** da proposizioni quali (A_1) e (A_2)?

2. esiste un **algoritmo** tale che, dato un qualsiasi argomento $\mathfrak{A}$, è in grado di decidere se $\mathfrak{A}$ è corretto (**valido**) oppure no?

Esempio 1.1.4 *La formula*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*ci da una **procedura generale** un **algoritmo** per la risoluzione di equazioni di secondo grado in* $\mathbb{R}$*:*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

(Dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $b^2 - 4ac \geqslant 0$.*)*

Sebbene gli sviluppi della logica matematica l'abbiano portata molto lontano dai problemi che hanno caratterizzato le sue origini, nel corso di queste lezioni esploreremo alcuni dei risultati ottenuti nel tentativo di dare una risposta agli interrogativi 1. e 2.

Questi risultati hanno origine da un'osservazione semplice, ma fondamentale. Se consideriamo l'argomento contenuto nell'**Esempio 1.1.1** e sostituiamo in esso il termine 'cani' al posto del termine 'uomini', il termine 'triangolari' al posto del termine 'mortali' e il termine 'Snoopy' al posto del termine 'Socrate', otteniamo un argomento valido (vedi Figure 1.3).

Esempio 1.1.5 *:*

(B_1)	Tutti i cani sono triangolari
(B_2)	Snoopy è un cane
$\therefore$	
(C')	Snoopy è triangolare

Figure 1.3: Sillogismo 2

Ciò che è mostrato da questo fenomeno è che la validità degli argomenti dati negli **Esempi 1.1.1** e **1.1.5** è indipendente dal significato di termini come 'uomini', 'cani', 'mortali', 'Socrate', 'Snoopy', ecc. ecc. e che, invece, dipende dalla **forma logica** degli argomenti:

Esempio 1.1.6 *:*

(D_1)	Tutte le x sono y
(D_2)	S è una x
$\therefore$	
(C'')	S è una y

Figure 1.4: Sillogismo 3

Ma, naturalmente, a questo punto si pongono una serie di domande a cui bisogna dare risposta per capire quanto è stato appena affermato e queste sono: Che cos'è la forma logica di un argomento? Come possiamo studiare la forma logica di un argomento? ecc.

Prima di affrontare tali quesiti, mi propongo inizialmente di:

(i) dare una definizione rigorosa di ciò che si deve intendere per **argomento** e per **argomento valido**;

(ii) mettere in evidenza l'importante rapporto esistente tra il concetto di **coerenza di un insieme di credenze** e quello di **validità di un argomento**.

L'importanza di questi due temi consiste nel fatto che il loro studio rappresenterà un passo fondamentale nel percorso che ci condurrà ad individuare degli algoritmi che ci consentiranno di decidere della validità o meno di certe **classi** di argomenti—vedremo anche che i nostri algoritmi avranno dei limiti ben precisi.

1.2 Coerenza

Se per 'credenza' intendiamo ciò che riteniamo sia il caso,

Esempio 1.2.1 *La Luna non è fatta di formaggio.*

possiamo dire che:

Definizione 1.2.1 (Coerenza di un insieme di credenze) *Un insieme di credenze A è **coerente** se esiste almeno una situazione possibile Σ in cui **tutte** le credenze appartenenti ad A sono vere.*

Definizione 1.2.2 *Un insieme di credenze A è **incoerente** se non è coerente.*

Esempio 1.2.2 *: $A_1 = \{$Padova e Napoli non sono entrambe a sud di Roma, Padova è a sud di Roma e Napoli è a nord di Roma$\}$.*

Esempio 1.2.3 *: $A_2 = \{$Alla festa baciò uno dei suoi amici, Tutti i suoi amici sono donne, Alla festa non baciò nessuna donna$\}$.*

Naturalmente è possibile che l'insieme di credenze A contenga un solo elemento.

Esempio 1.2.4 *: $A_4 = \{$Gaspare è più alto di se stesso$\}$.*

Una credenza p tale che non esiste una situazione possibile Σ in cui p è vera è **autocontradditoria** o è una **contraddizione**.

Nota Bene 1.2.1 *:*

- *Che succede se A è vuoto, $A = \emptyset$, o se $A = \{x \mid x$ è una credenza$\}$?*
- *Ci sono due modi di descrivere un insieme A:*
    1. *$A = \{a, b, c\}$ o $A = \{a, b, c, \ldots\}$;*

2. $A = \{x \mid x \text{ è} \ldots\}$.

Dal momento che le credenze sono esprimibili mediante **frasi enunciative** o **asserzioni**, e che ogni frase enunciativa o asserzione esprime una credenza siamo in grado di ridurre lo studio della coerenza di insiemi di credenze allo studio della coerenza degli insiemi di asserzioni che le esprimono.

Ora è ben noto che all'interno del linguaggio ordinario esistono delle frasi che non sono delle asserzioni; e perché la procedura di cui siamo alla ricerca sia realmente meccanica—e cioè escluda l'intuizione creativa, ecc. ecc.—abbiamo, quindi, bisogno di una definizione di 'asserzione' che ci dia la possibilità di decidere se una frase appartenente alla lingua italiana è un'asserzione oppure no.

Definizione 1.2.3 (Asserzione) *: Un'**asserzione** appartenente alla lingua Italiana è una frase grammaticalmente corretta che può essere sostituita al posto della x in (α):*

$$(\alpha)\quad \textit{È vero che } x?$$

Esempio 1.2.5 *Che ore sono?*

Esempio 1.2.6 *Chiudi la porta!*

Esempio 1.2.7 *Sopra la panca la capra campa.*

1.3 Ambiguità

Uno dei problemi connessi con quello di determinare se un insieme A di asserzioni è coerente o meno è quello di determinare in modo non ambiguo il significato delle asserzioni appartenti ad A. Infatti, è solo se comprendiamo il significato di un'asserzione S che possiamo dire se S è vera o falsa. Ma che cosa s'intende dire quando si afferma che un'asserzione è ambigua?

Definizione 1.3.1 (Ambiguità di un'asserzione) *Un'asserzione P è **ambigua** se può essere intesa in almeno due modi diversi l'uno dall'altro.*

Esempio 1.3.1 *L'altra notte Margherita ha sognato di andare a caccia di ippopotami con la mini gonna.*

Definizione 1.3.2 (Ambiguità lessicale) *Data un'asserzione P si ha un'**ambiguità lessicale** in P se esiste almeno una parola w appartenente a P che può essere interpretata in almeno due modi diversi.*

Esempio 1.3.2 *:*

1. *Ho visto Schumacher guidare un'auto che andava a marsala*

2. *Una donna è stata baciata più volte dal macellaio*

Definizione 1.3.3 (Ambiguità strutturale) *Data un'asserzione P si ha un'**ambiguità strutturale** in P se le parole w che occorrono in P possono essere raggruppate in almeno due modi diversi.*

Esempio 1.3.3 (Ordinaria) *Ibis redibis non morieris in bello*

Esempio 1.3.4 (Riferimento incrociato) *La polizia ha arrestato tre ladri, due ex carcerati e un ragazzo.*

Nota Bene 1.3.1 *L'ambiguità strutturale da **riferimento incrociato** ha luogo quando una parola o un'espressione che occorrono in un'asserzione P fanno riferimento a qualche parola o espressione appartente a P, ma non è chiaro esattamente a quale.*

1.4 Coerenza. Una procedura di decisione?

Consideriamo l'insieme di asserzioni A_1 dell'**Esempio 1.2.2** e applichiamo

una procedura meccanica il cui scopo è quello di individuare tutte le situazioni possibili (se ve ne sono) in cui tutte le asserzioni di A_1 sono vere.

Esempio 1.4.1 *:*

$\checkmark_2$ *Padova e Napoli non sono entrambe a sud di Roma*
$\checkmark_1$ *Padova è a sud di Roma e Napoli è a nord di Roma*
Padova è a sud di Roma
Napoli è a nord di Roma

<u>*Padova non è a sud di Roma*</u>   *Napoli non è a sud di Roma*

Procedura meccanica

(I) Scrivi le asserzioni appartenenti ad A_1 una accanto all'altra (o sotto l'altra) e vai a **(II)**

(II) Se non ci sono **asserzioni complesse**[1] nell'elenco, vedi se vi compaiono come elementi un'asserzione P e la sua negazione non-P. Se questo è il caso, traccia una linea sotto l'elenco e FERMATI. Se questo non è il caso FERMATI lo stesso. Se invece l'elenco contiene asserzioni complesse vai a **(III)**.

(III) Scegli una qualsiasi asserzione complessa P tale che:

1. P compare in un **ramo aperto** del diagramma/*tableau*;[2]
2. P non è contrassegnata dal simbolo '✓';

contrassegna P con il simbolo '✓', descrivi, usando asserzioni più brevi di P le situazioni in cui P è vera, usa queste proposizioni per prolungare ogni ramo aperto che contiene P e vai a **(IV)**.

(IV) Se ci sono rami del diagramma che contengono come elementi un'asserzione P e la sua negazione non-P chiudili e vai a **(V)** altrimenti vai a **(V)** lo stesso.

(V) Se il diagramma non contiene rami aperti FERMATI. Se il diagramma contiene rami aperti, ma in questi rami non vi sono asserzioni complesse P che non sono state contrassegnate con il simbolo '✓' FERMATI. Se il diagramma contiene rami aperti in cui vi sono come elementi asserzioni complesse che non sono state contrassegnate con il simbolo '✓' vai a **(III)**.

A questo punto una delle due seguenti cose possono accadere:

(i) tutti i rami del *tableu* sono sbarrati (il *tableau* è **chiuso**);

(ii) esiste almeno un ramo aperto del *tableau* (il *tableau* è **aperto**).

---

[1]Per **asserzioni complesse** intendiamo delle asserzioni che non sono nè asserzioni atomiche nè la negazione di asserzioni atomiche.

[2]Un **ramo** del *tableau* che stiamo disegnando consiste nella **radice** del *tableau*, rappresentata dall'elenco degli elementi di A_1, e in un qualsiasi sentiero che estende la radice. Un ramo del diagramma è **aperto** se e solo se questo non contiene come elementi un'asserzione P e la sua negazione non-P.

Nel caso **(i)** A_1 è incoerente, mentre nel caso **(ii)**, *se gli elementi di* A_1 *sono asserzioni di un certo tipo*, allora le asserzioni presenti in un qualsiasi ramo aperto del *tableau* descrivono una situazione Σ in cui tutte le asserzioni presenti in A_1 sono vere.

Nota Bene 1.4.1 *La procedura illustrata funziona per una certa classe di asserzioni (vedi* caveat *presente nell'osservazione di cui sopra relativa a* **(ii)**), *perchè, dal momento che* A_1 *contiene un numero finito di asserzioni, che ogni asserzione complessa è composta da un numero finito di asserzioni semplici e che ogni operazione usata nel prolungare un ramo del* tableau *riduce la complessità dell'asserzione a cui viene applicata, ne segue che questa procedura deve terminare dopo un numero finito di passi.*

1.5 Argomenti

Definizione 1.5.1 (Che cos'è un argomento?) *Un argomento è ciò che una persona produce quando fa un'asserzione e dà delle ragioni per credere nella verità dell'asserzione. L'asserzione stessa è chiamata* ***conclusione*** *dell'argomento, mentre le ragioni che vengono date per credere nella verità dell'asserzione sono chiamate* ***premesse****. Si dice che la conclusione di un argomento è* ***dedotta*** *o* ***inferita*** *dalle premesse.*

Esempio 1.5.1 (Argomento in forma implicita) *Deve essere un comunista: legge l'Unità.*

Esempio 1.5.2 (Argomento in forma esplicita) *Legge l'Unità e, quindi, deve essere un comunista.*

Definizione 1.5.2 (Validità di un argomento) *Un argomento* $\mathfrak{A}$ *è* ***valido*** *se non esiste una situazione possibile* Σ *in cui* ***tutte*** *le premesse di* $\mathfrak{A}$ *sono vere e la conclusione di* $\mathfrak{A}$ *è falsa. Se* $\mathfrak{A}$ *è un argomento valido si dice che le sue premesse* ***implicano logicamente*** *la sua conclusione o che la sua conclusione è una* ***conseguenza logica*** *delle sue premesse.*

L'argomento espresso negli esempi **1.5.1** e **1.5.2** non è valido, perchè?

Nota Bene 1.5.1 *In logica ci interessano gli argomenti validi, perchè questi sono tutti e soltanto quegli argomenti in cui la verità della conclusione dipende dalla verità delle premesse. Solo in questo caso, infatti, siamo autorizzati a pensare che le premesse dell'argomento 'giustificano' la conclusione dell'argomento nel senso che l'accettare come vere tutte le premesse di un argomento valido ci obbliga ad accettare come vera anche la conclusione dell'argomento.*

Definizione 1.5.3 (Insieme controesempio) *Dato un argomento $\mathfrak{A}$, l'**insieme controesempio** di $\mathfrak{A}$ è quell'insieme di asserzioni $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ i cui elementi sono le premesse di $\mathfrak{A}$ e la **negazione della conclusione** di $\mathfrak{A}$.*

Esempio 1.5.3 *L'insieme controesempio dell'argomento dato nell'**Esempio 1.5.2** è: {Legge l'*Unità*, non è un comunista}.*

Nota Bene 1.5.2 *Se $\mathfrak{A}$ è un argomento, $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ è chiamato 'l'insieme controesempio di $\mathfrak{A}$', perchè l'esistenza di una situazione possibile Σ tale che se $P \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ allora P è vera in Σ rivela che $\mathfrak{A}$ non è valido (perchè?).*

Teorema 1.5.1 (Fondamentale) *Un argomento $\mathfrak{A}$ è valido **se e solo se** il suo insieme controesempio è incoerente.*

Se $\mathfrak{A}$ è valido, allora, per ogni situazione Σ in cui le premesse $P_1, \ldots, P_n$ di $\mathfrak{A}$ sono tutte vere, avremo che anche la conclusione C di $\mathfrak{A}$ sarà vera in Σ. Ma, se C è vera in Σ, allora non-C sarà falsa in Σ. Questo implica che non esiste una situazione Σ tale che tutti gli elementi dell'insieme

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{A}} = \{P_1, \ldots, P_n, \text{non-}C\}$$

sono veri in Σ e che, quindi, l'insieme controesempio di $\mathfrak{A}$ è incoerente.

Se $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ è incoerente, allora, per ogni situazione Σ tale che $P_1, \ldots, P_n$ sono tutte vere in Σ, avremo che non-C sarà falsa in Σ. Ma, se non-C è falsa in Σ, allora C è vera in Σ; questo implica che, per ogni situazione Σ tale che tutte le $P_1, \ldots, P_n$ sono vere in Σ, anche C è vera in Σ, e che, quindi, $\mathfrak{A}$ è valido $\square$

Nota Bene 1.5.3 *:*

- *La definizione di validità di un argomento $\mathfrak{A}$ fa, chiaramente, appello alla struttura logica di $\mathfrak{A}$, la quale deve essere tale che ogni qual volta tutte le premesse di $\mathfrak{A}$ sono vere (indipendentemente da quale possa essere il loro significato) anche la conclusione di $\mathfrak{A}$ deve essere vera (indipendentemente da quale possa essere il suo significato).*

- *La grande importanza del* **Teorema 1.5.1** *consiste nel fatto che questo riduce il problema del controllare la validità di un argomento $\mathfrak{A}$ al problema di controllare la coerenza dell'insieme controesempio di $\mathfrak{A}$.*

- *Possiamo applicare la tecnica dei* tableaux *per* **controllare meccanicamente** *la coerenza di (un gran numero di) insiemi di asserzioni.*

1.6 Esercizi

1. Possono esserci degli argomenti validi $\mathfrak{A}$ in cui le premesse e le conclusioni hanno valori di verità come segue? (Rispondere con un sì o un no nel caso di ciascuna delle seguenti combinazioni.)

   (a) Le premesse sono tutte vere, la conclusione è falsa.

   (b) Le premesse sono tutte vere, la conclusione è vera.

   (c) Le premesse sono tutte false, la conclusione è falsa.

   (d) Alcune premesse sono vere, alcune sono false, la conclusione è falsa.

   (e) Le premesse sono tutte vere, la negazione della conclusione è vera.

   (f) Alcune premesse sono vere, alcune premesse sono false, la conclusione è vera.

2. Le premesse di un argomento $\mathfrak{A}$ implicano logicamente la conclusione di $\mathfrak{A}$ sempre, a volte, o mai, assumendo che le seguenti condizioni siano soddisfatte?

   (**Attenzione**: se S è un'asserzione, dire che 'S è necessaria' significa che S è vera in ogni situazione possibile Σ; invece, dire che 'S è incoerente' significa che l'insieme $\{S\}$ è incoerente.)

   (a) Le premesse formano un insieme coerente.

   (b) Le premesse e la conclusione formano un insieme coerente.

   (c)* Le premesse formano un insieme incoerente.

   (d) La conlusione è coerente.

   (e) Ciascuna premessa è necessaria e la conclusione è incoerente.

   (f) La conclusione è incoerente

   (g)* La negazione della conclusione è incoerente e, cioè, la conclusione è necessaria.

   (h) Le premesse e la negazione della conclusione sono incoerenti l'una con l'altra.

3. Non tutte le asserzioni che seguono sono ambigue. Dire quali lo sono, perchè lo sono, riscrivere le asserzioni in modo da eliminare l'ambiguità.

   (a) Nessuna nuova è una buona nuova.

   (b) Dopo aver sudato tutto il giorno per caricare 10 tonnellate di sabbia sul camion, Paolo si è ritrovato con due chili di meno.

(c) A Carnevale ogni scherzo vale.

(d) La gente in Italia sta diventando più vecchia e più grassa.

4. Usa il metodo dei *tableaux* per determinare se i seguenti insiemi di asserzioni sono coerenti.

   (a) $A_1 = \{$O il tuo albero è deciduo e non ha foglia larga o ha foglia larga, o il tuo albero non ha foglia larga o è deciduo, Il tuo albero non è deciduo$\}$

   (b) $A_2 = \{$Padova si trova o in Italia o in Grecia, o Padova non è in Grecia o l'Italia non è in Europa, L'Italia è in Europa, Padova non è in Europa, o non è vero che Padova si trova in Italia e che l'Italia è in Europa o Padova è in Europa$\}$

5. Riscrivi il seguente argomento in forma esplicita dicendo se ritieni sia valido.

   (a) O Roberto non sarà scelto per far parte della squadra o ci sarà mancanza di buoni giocatori. Dal momento che ci sono molti buoni giocatori, possiamo essere sicuri che Roberto non verrà scelto.

Chapter 2

Funtori proposizionali e funtori di verità

2.1 Introduzione

Nell'ultima lezione abbiamo dato una risposta al primo quesito che (vedi p. 6) ci eravamo posti all'inizio del corso—che cosa rende valido un argomento?—e, con la dimostrazione del Teorema Fondamentale, abbiamo anche stabilito una base di partenza per affrontare, con buone probabilità di successo, il secondo quesito: esiste una procedura meccanica, un algoritmo, tale che, dato un qualsiasi argomento $\mathfrak{A}$, sia in grado di determinare in un numero finito di passi se $\mathfrak{A}$ è valido oppure no?

Come abbiamo visto, la validità di un argomento dipende da come la verità delle premesse dell'argomento è in relazione alla verità della conclusione dell'argomento. Ma, dato che sia le premesse che la conclusione di un argomento sono delle asserzioni, un importante problema da risolvere è: esiste una procedura che ci consenta di decidere, in un modo puramente meccanico ed in un numero finito di passi, se, dato un argomento $\mathfrak{A}$ e una situazione possibile Σ, le asserzioni appartenenti a $\mathfrak{A}$ sono vere o false in Σ?

In questa lezione inizierò ad affrontare questo problema. La strategia di attacco alla questione appena sollevata consisterà nel: *prendere in considerazione soltanto quelle asserzioni il cui valore di verità è determinato dalla composizione dei valori di verità delle asserzioni da cui queste sono costituite.*

Il motivo che spiega questa restrizione è ovvio: se A è un'asserzione di questo tipo, e sono di questo tipo anche tutte le asserzioni complesse che occorrono in A, una volta assegnati i valori di verità alle componenti elementari (asserzioni atomiche) di A, saremo in grado di calcolare il valore di verità di A.

Definizione 2.1.1 (Asserzione complessa) *Un'asserzione A è **complessa** se è il risultato dell'applicazione di uno o più connettivi — o... o..., ...e..., se... allora..., ...se e solo se..., non è vero che..., ecc. ecc. — a delle asserzioni già date.*

Definizione 2.1.2 (Asserzione semplice o atomica) *Un'asserzione A è **semplice** o **atomica** se non è complessa.*

Le due asserzioni seguenti sono atomiche o complesse?

Esempio 2.1.1 *La corazzata Potëmkin è una cagata pazzesca. (Rag. Fantozzi)*

Esempio 2.1.2 *La corazzata Potëmkin non è una cagata pazzesca. (Il super direttore del Rag. Fantozzi)*

Ma, data un'asserzione A, come facciamo a determinare le asserzioni da cui A è costituita? Per mezzo dell'analisi logica!

2.2 Funtori proposizionali

Consideriamo la seguente asserzione:

(i) O i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa o non lo sono.

Possiamo analizzare **(i)** nel modo seguente:

(a) **asserzione**: I baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa;

(b) **asserzione**: Non è vero che I baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa;

(c) **matrice**: O ϕ o ψ.

Nota Bene 2.2.1 *:*

- *Le lettere dell'alfabeto greco che occorrono nella matrice si chiamano **variabili proposizionali**, perchè sono dei simboli che stanno per delle asserzioni;*

- *data una matrice è possibile sostituire delle asserzioni al posto delle variabili, ma* ***uniformemente*** *e, cioè, avendo cura di sostituire per tutta la formula le stesse asserzioni al posto delle stesse variabili.*

Definizione 2.2.1 (Funtore proposizionale) *Un* ***funtore proposizionale*** *è un insieme finito di variabili proposizionali e di parole appartenenti alla lingua italiana tale che se andiamo a sostituire delle asserzioni al posto di tutte le sue variabili otteniamo un'asserzione.*

Dalla **Definizione 2.2.1** ricaviamo immediatamente che la matrice **(c)** è un funtore proposizionale.

Esempio 2.2.1 (Qual'è il funtore proposızionale?) *:*

1. *Albert è ϕ.*
2. *È vero che ϕ?*
3. *È possibile che ϕ.*

Nota Bene 2.2.2 *:*

- *I funtori proposizionali possono essere classificati in relazione al numero di variabili proposizionali diverse l'una dall'altra da loro contenute. Se un funtore proposizionale $\digamma_p$ contiene n variabili proposizionali diverse l'una dall'altra, dove n è un numero naturale maggiore o uguale a 0, diremo che $\digamma_p$ è un funtore proposizionale ad n posti.*

- *Ad ogni funtore proposizionale $\digamma_p$ è possibile associare un diagramma, chiamato* ***tavola di verità****, che ci rivela se e come il valore di verità dell'asserzione ottenuta sostituendo uniformemente asserzioni al posto delle variabili di $\digamma_p$ dipende dai possibili valori di verità di queste asserzioni. (Un'asserzione è un funtore proposizionale $\digamma_p$ a 0 posti.)*

- *I funtori proposizionali ad n posti, per $n \in \mathbb{N}$, si chiamano così, perché sono delle* ***funzioni*** *che associano a delle* **n*-ple ordinate*** *di asserzioni (****proposizioni****) un'asserzione (****proposizione****).*

Esempio 2.2.2 *Se consideriamo il funtore proposizionale 'O ϕ o ψ', dal momento che questo dà luogo ad asserzioni false solo quando sostituiamo asserzioni false sia al posto di ϕ che a quello di ψ e asserzioni vere in ogni altro caso, abbiamo che:*

ϕ	ψ	$O\ \phi\ o\ \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Nota Bene 2.2.3 *:*

- *Il funtore proposizionale* $\mathcal{F}_p$ *a cui viene associata la tavola di verità dell'***Esempio 2.2.2** *corrisponde al connetivo latino* vel *e non al connettivo latino* aut. *In notazione logica questo funtore proposizionale è rappresentato dal simbolo '$\vee$'.*

2.3 Funtori di verità

Nella sezione §**2.2** abbiamo visto che, dato un funtore proposizionale $\mathcal{F}_p$, possiamo associare una tavola di verità a $\mathcal{F}_p$. Però una tavola di verità di un funtore $\mathcal{F}_p$ può essere parziale o completa. Per esempio, abbiamo già visto che la tavola di verità del funtore 'O ϕ *o* ψ' è completa, ma le cose stanno diversamente a proposito dei seguenti funtori proposizionali:

Esempio 2.3.1

ϕ	*È possibile che* ϕ
V	V
F	$\ldots$

(a) $a \neq a$*;*

(b) *Napoleone è morto il 6 maggio del 1821.*

Nota Bene 2.3.1 *In notazione logica, il funtore proposizionale 'È possibile che. . . ' è rappresentato dal simbolo '$\Diamond$', mentre il funtore proposizionale 'È necessario che. . . ' è rappresentato dal simbolo '$\Box$'.*

Esempio 2.3.2

ϕ	*È impossibile che* ϕ
V	F
F	$\ldots$

(a) $a \neq a$*;*

(b) *Napoleone è morto il 6 maggio del 1821.*

Esempio 2.3.3

ϕ	*Rosalia crede che* ϕ
V	$\cdots$
F	$\cdots$

(a) *Ci sono alcune credenze vere che Rosalia ha e alcune credenze vere che Rosalia non ha;*

(b) *Ci sono alcune credenze false che Rosalia ha e alcune credenze false che Rosalia non ha.*

Definizione 2.3.1 (Funtore di verità) *Un funtore proposizionale $\digamma_p$ che ha una tavola di verità completa si chiama **funtore di verità**.*

Nota Bene 2.3.2 *:*

- *I funtori di verità sono molto importanti, perchè il valore di verità dell'asserzione A, che otteniamo sostituendo uniformemente delle asserzioni $A_1, \ldots, A_n$, dove n è un numero naturale, al posto di tutte le variabili di un funtore di verità ad n posti $\digamma_p$, dipende dai valori di verità delle asserzioni $A_1, \ldots, A_n$ usate nella sostituzione. Questo fatto ci dà la possibilità di calcolare il valore di verità di A partire dai valori di verità di $A_1, \ldots, A_n$ seguendo la **funzione di verità** espressa da $\digamma_p$ nella sua tavola di verità. Considera l'**Esempio 2.2.2**.*

- *Una funzione di verità v è una funzione tale che:*

$$v : \{V, F\}_1 \times \cdots \times \{V, F\}_n \to \{V, F\}.$$

2.4 Analisi

Nel controllare se un argomento $\mathfrak{A}$ è valido oppure no, o se un dato insieme di asserzioni A è coerente oppure no, il primo passo da fare in **logica proposizionale** è quello di individuare tutte le asserzioni atomiche che occorrono nelle asserzioni appartenenti ad $\mathfrak{A}$ (o ad A).

Il secondo consiste nel parafrasare le asserzioni di $\mathfrak{A}$ (o quelle appartenenti ad A) in modo tale da ottenere delle asserzioni che hanno lo stesso significato di quelle da parafrasare e i cui connettivi sono funtori di verità.

Consideriamo l'**Esempio 2.4.1**

Esempio 2.4.1 *Gli ispettori delle Nazioni Unite hanno deciso di esaminare con grande attenzione i baffi di Saddam Hussein. Quindi, o i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa o non lo sono.*

Se analizziamo l'asserzione 'o i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa o non lo sono' come abbiamo fatto prima e, cioè:

(a) **asserzione**: i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa;

(b) **asserzione**: non è vero che i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa;

(c) **matrice**: O ϕ o ψ;

non saremo in grado di decidere se l'argomento è valido oppure no. Infatti, se la variabile χ sta al posto della premessa dell'argomento avremo che non c'è alcuna ragione di pensare che la verità di ϕ o ψ debba seguire dalla verità di χ in:

(d) χ Quindi, O ϕ o ψ.

D'altro canto se analizziamo l'asserzione complessa **(b)** nelle sue componenti abbiamo:

($\mathbf{b_1}$) non è vero che [i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa].

L'asserzione atomica presente in ($\mathbf{b_1}$) è 'i baffi di Saddam Hussein sono un'arma di distruzione di massa'.

Dato il livello di analisi ora raggiunto, la matrice della conclusione adesso sarà:

($\mathbf{c_1}$) O ϕ o non è vero che ϕ.

Dal momento che ($\mathbf{c_1}$) è un funtore di verità ad un posto (**perchè?**), è facile vedere che ($\mathbf{c_1}$) dà origine ad asserzioni che sono sempre vere. Infatti:

ϕ	O	ϕ	o	non è vero che	ϕ
V		V	V	F	V
F		F	V	V	F

Da queste considerazioni segue che l'argomento la cui matrice è **(e)** è valido.

(e) χ Quindi, O ϕ o non è vero che ϕ (**Perchè?**)

Principio 2.4.1 (Sulla parafrasi) *Se due asserzioni B e C hanno lo stesso significato, hanno anche lo stesso valore di verità in ogni situazione Σ. Da ciò segue che:*

1. *il sostituire C al posto di B (o vice versa) nelle asserzioni presenti in un argomento $\mathfrak{A}$ non altera la validità (o meno) di $\mathfrak{A}$; e che*
2. *sostituire C al posto di B (o vice versa) nelle asserzioni appartenenti ad un insieme di asserzioni A non altera la coerenza (o meno) di A.*

Nota Bene 2.4.1 *È importante tenere a mente che in logica proposizionale il livello di analisi non si spinge più in là del livello delle asserzioni atomiche. La logica proposizionale non studia la struttura interna delle asserzioni atomiche e questo, come vedremo quando ci occuperemo del calcolo dei predicati del primo ordine con identità, pone dei limiti ben precisi alla procedura di decisione per la validità degli argomenti che svilupperemo nell'ambito della logica proposizionale.*

2.5 I funtori di verità principali

Il parafrasare asserzioni per mezzo di asserzioni completamente analizzate che hanno come matrici dei funtori di verità non è sempre facile. I problemi hanno inizio con il tentativo di rappresentare, per mezzo di funtori di verità appartenenti al linguaggio della logica proposizionale, i seguenti funtori proposizionali della lingua italiana: non è vero che . . . , O . . . o . . . , . . . e . . . , se . . . allora . . . , . . . se e solo se . . .

In realtà non c'è nessuna difficoltà nel rappresentare 'non è vero che . . . ' per mezzo di '$\neg$':

(1) **non è vero che** $\phi \rightsquigarrow \neg\phi$

ϕ	$\neg\,\phi$	$\neg\neg\,\phi$
V	F	V
F	V	F

L'unico problema connesso con la negazione è che, mentre $\neg\neg\,\phi$ è equivalente a ϕ (vedi la tavola di verità di $\neg$)—la doppia negazione afferma in logica!—non è sempre così in italiano. Infatti, a volte, in italiano la doppia negazione rafforza la negazione invece di essere equivalente ad un'affermazione.

Esempio 2.5.1 *Non c'è nessuna possibilità che Messner riesca a scalare il K2 in apnea e con le mani legate dietro la schiena.*

Le prime serie difficoltà sorgono con il tentativo di rappresentare 'O ... o ...'. Infatti, in Italiano l'asserire 'O A o B' implica 'non entrambi A e B', mentre il funtore di verità '$\vee$' è vero anche nel caso in cui entrambi i disgiunti sono veri.

Esempio 2.5.2 *O hai la botte piena o la moglie ubriaca.*

(2) $\quad$ **O** ϕ **o** $\psi \rightsquigarrow (\phi \vee \psi)$

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$	$(\psi \vee \phi)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Ulteriori problemi riguardanti '$\vee$' sono rappresentati nell'**Esempio 2.5.2**

Esempio 2.5.3 *:*

(a) *'Mi sveglierò alle 8.00 a meno che la sveglia non si rompa' non può essere parafrasata come in* (a')

(a') (*Mi sveglierò alle 8.00* $\vee$ *La mia sveglia è rotta*), *perchè mentre* (a') *è equivalente ad* (a''), (a'') *non è equivalente ad* (a). ***(Perchè?)***

(a'') (*La mia sveglia è rotta* $\vee$ *Mi sveglierò alle 8.00*).

(3) $\quad \phi$ **e** $\psi \rightsquigarrow (\phi \wedge \psi)$

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$	$(\psi \wedge \phi)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Nota Bene 2.5.1 (Problemi con $\wedge$) *A volte in un'asserzione avente la forma 'A e B' la congiunzione 'e' è usata in modo* restrittivo. *In questi casi l'asserzione 'A e B' non può essere parafrasata per mezzo di* $(A \wedge B)$.

Esempio 2.5.4 *:*

(a) *'I filosofi, che hanno la tendenza ad essere pedanti, studiano la logica.'*

- (a) *può essere parafrasata con:*

  (**a**)′ (*I filosofi hanno la tendenza ad essere pedanti* $\wedge$ *I filosofi studiano la logica*)

  perchè l'insieme di coloro i quali sono filosofi e dei pedanti non è una restrizione (sottoinsieme proprio) dell'insieme dei filosofi.

(b) *'I filosofi che hanno la tendenza ad essere pedanti studiano la logica.'*

- (**b**) *non può essere parafrasata con:*

  (**b**)′ (*I filosofi hanno la tendenza ad essere pedanti* $\wedge$ *I filosofi studiano la logica*)

  perchè l'insieme di coloro i quali sono filosofi e dei pedanti è una restrizione (sottoinsieme proprio) dell'insieme dei filosofi.

Esempio 2.5.5 *:*

(a) *'Pinocchio è un gran bugiardo'*

- (a) *non può essere parafrasata con:*

  (**a**)′ (*Pinocchio è grande* $\wedge$ *Pinocchio è bugiardo*)

  perchè il predicato 'grande' è ristretto all'insieme dei bugiardi.

Esempio 2.5.6 *:*

(a) *'Filippo è andato a Napoli ed è morto'*

- (a) *non può essere parafrasata con:*

  (**a**)′ (*Filippo è andato a Napoli* $\wedge$ *Filippo è morto*)

  perchè (**a**)′ *è equivalente ad* (**a**)″

  (**a**)″ (*Filippo è morto* $\wedge$ *Filippo è andato a Napoli*)

  ma (**a**)″ *non è equivalente ad* (a). ***(Perchè?)***

(4) Se ϕ allora $\psi \rightsquigarrow (\phi \rightarrow \psi)$

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nota Bene 2.5.2 *:*

- *Il funtore di verità $\rightarrow$ si chiama* implicazione materiale.
- *In $(\phi \rightarrow \psi)$ l'implicazione materiale ha a che fare soltanto con i valori di verità di ϕ e di ψ e non con i loro significati.*
- *L'implicazione materiale deve essere intesa come una promessa che se ϕ allora ψ, promessa che viene violata, come tutte le promesse,* ***soltanto nel caso in cui*** *ϕ ma $\neg\psi$. Scrivere $(\phi \rightarrow \psi)$ è, dunque, equivalente a scrivere $(\neg\phi \vee \psi)$. Da quest'ultimo fatto si ricava la giustificazione relativa alla tavola di verità di $\rightarrow$.*

Nota Bene 2.5.3 (Problemi con $\rightarrow$) *:*

- *Il rendere 'Se ϕ allora ψ' per mezzo di $(\phi \rightarrow \psi)$ è uno dei problemi più difficili da risolvere nel fare delle parafrasi. Le asserzioni ϕ (l'****antecedente*** *del condizionale) e ψ (il* ***conseguente*** *del condizionale) che occorrono in $(\phi \rightarrow \psi)$ devono essere valutate in relazione al loro valore di verità* ***indipendentemente l'una dall'altra****.*

  Molto spesso in italiano vi sono dei casi in cui ciò non è possibile:

  (a) *quando il conseguente di un condizionale è legato indissolubilmente all'antecedente da relazioni causali o di altro tipo.*

  (b) *quando si ha a che fare con i* condizionali controfattuali.

Esempio 2.5.7 (Caso maligno di riferimento incrociato) *:*

(a) *'Se una piccola quantità di questa sostanza è messa in acqua si dissolve'*

Commento ***(a)*** *non può essere parafrasata come:*

(a)′ *'(una piccola quantità di questa sostanza è messa in acqua $\rightarrow$ una piccola quantità di questa sostanza si dissolve)', perchè non è una qualsiasi piccola quantità di sostanza che si dissolve, ma solo quella che viene messa nell'acqua.*

Esempio 2.5.8 (Caso benigno di riferimento incrociato) *:*

(a) *Se il credere nell'Utilitarismo impedisce alla gente di massimizzare la felicità, è meglio non credere in esso.*

(**a**)′ *Il credere nell'Utilitarismo impedisce alla gente di massimizzare la felicità* $\rightarrow$ *È meglio non credere nell'Utilitarismo.*

Esempio 2.5.9 (Condizionale controfattuale) *:*

(a) *Se tu adesso avessi fatto cadere quel vaso, lei non ti avrebbe mai perdonato*

Commento ***(a)*** *non può essere parafrasata come:*

(**a**)′ (*tu fai cadere quel vaso* $\rightarrow$ *lei non ti perdona*), *perchè i condizionali controfattuali non sono dei funtori di verità.*

Esempio 2.5.10

ϕ	ψ	*Se fosse che* ϕ *allora sarebbe che* ψ
F	F	$\cdots$

ϕ_1:= *Napoleone è morto alla battaglia di Austerlitz;*

ψ_1:= *Napoleone è morto prima del 5 maggio del 1821.*

ϕ_2:= *Napoleone è morto alla battaglia di Austerlitz;*

ψ_2:= *Napoleone è morto dopo il 5 maggio del 1821.*

(5) ϕ **se e solo se** $\psi \rightsquigarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota Bene 2.5.4 (Sulle tavole di verità) *Le tavole di verità dei principali funtori di verità sono molto importanti, anche perchè sono ciò che definisce il loro significato. Imparatele a memoria!*

Nota Bene 2.5.5 (Linee guida per le parafrasi) *:*

- *Analizzate l'asserzione complessa raggiungendo il livello di analisi più profondo.*
- *L'asserzione e la parafrasi devono avere lo stesso significato.*
- *Eliminate i riferimenti incrociati.*
- *Controllate che l'asserzione parafrasata e la sua parafrasi assumano lo stesso valore di verità nelle stesse situazioni.*
- *Badate a che i funtori proposizionali presenti nelle asserzioni complesse siano stati rimpiazzati nelle relative parafrasi da funtori di verità appartenenti al linguaggio della logica proposizionale.*

2.6 Esercizi

1. Per ciascuna delle seguenti espressioni dire se si tratta di un funtore proposizionale oppure no. Se la risposta non è chiara dire perchè.

   (a) Non c'è alcun dubbio che ϕ.

   (b) Chiaramente ϕ.

   (c) Dovrebbe essere il caso che ϕ.

   (d) Penso, quindi ϕ.

2. Che cos'è un funtore di verità? Quali delle seguenti espressioni sono funtori di verità? Giustificare in entrambi i casi la propria risposta.

   (a) Per quanto tutti gli indizi sembrino puntare alla conclusione opposta, ϕ potrebbe essere vera.

   (b) ϕ ma ψ.

   (c) Non è vero che sia ϕ che ψ.

   (d) La verità di ϕ è una ragione necessaria e sufficiente per ψ.

   (e) ϕ sulla base di ψ.

   (f) Prima che ϕ, non se ne preoccupava nessuno.

Chapter 3

Il calcolo proposizionale I

3.1 Introduzione

Gli scopi fondamentali di questa lezione sono:

1. completare l'insieme di informazioni di cui abbiamo bisogno per effettuare delle parafrasi corrette di asserzioni in italiano per mezzo dell'uso di funtori di verità;

2. iniziare la descrizione di un calcolo che ci metterà a disposizione una procedura di decisione riguardante la validità di un'ampia classe di agomenti.

La strategia generale che seguiremo sarà la seguente:

(a) prenderemo in considerazione argomenti $\mathfrak{A}$ in cui sia le premesse che le conclusioni saranno asserzioni appartenenti alla lingua italiana;

(b) tradurremo/rappresenteremo queste asserzioni in/per mezzo di asserzioni appartenenti al linguaggio del calcolo proposizionale $\mathcal{L}_0$ aventi la stessa forma logica e valori di verità delle asserzioni tradotte;

(c) applicheremo la tecnica dei *tableaux* all'insieme delle $\mathcal{L}_0$-traduzioni delle asserzioni in lingua italiana appartenenti all'insieme controesempio di un argomento $\mathfrak{A}$. Se il *tableau* così ottenuto è chiuso, l'argomento è valido.

Nota Bene 3.1.1 *:*

- *L'importanza di* **(b)** *consiste nel fatto che la traduzione di asserzioni appartenenti alla lingua italiana in asserzioni appartenenti ad* $\mathcal{L}_0$*:*

1. *elimina ogni ambiguità riguardante il significato di queste espressioni;*
2. *mette in evidenza la forma logica di tali espressioni.*

3.2 Analisi e raggio d'azione di un funtore

Immaginiamo di parafrasare **(a)** facendo uso di funtori di verità.

(a) Non me ne starò qui seduto lasciandoti dire cose del genere.

Sembra che ci siano due possibilità:

(a)$_{\mathbf{1}}$ ($\neg$ me ne starò seduto qui $\wedge$ ti lascerò dire cose del genere)

(a)$_{\mathbf{2}}$ $\neg$ (me ne starò seduto qui $\wedge$ ti lascerò dire cose del genere)

Riflettendo sulle due parafrasi ci rendiamo conto che (a)$_{\mathbf{1}}$ è errata, mentre (a)$_{\mathbf{2}}$ è corretta. (**Perchè?**) Il motivo è che in **(a)** il **raggio d'azione** del 'Non ... ' è tutta l'asserzione. In altre parole, la forma logica di **(a)** è:

$$\neg(\phi \wedge \psi).$$

Secondo (a)$_{\mathbf{1}}$, invece, la forma logica di **(a)** è:

$$(\neg\phi \wedge \psi)$$

e, cioè, per (a)$_{\mathbf{1}}$, il raggio d'azione del 'Non ... ' è rappresentato da 'Me ne starò seduto qui'.

Nota Bene 3.2.1 *Se si vuole parafrasare un'asserzione in cui compaiono più di un funtore di verità, allora bisogna:*

1. *individuare il funtore di verità che compare nell'asserzione ed ha il raggio d'azione più ampio per poi passare a quello che ha un raggio d'azione immediatamente più piccolo di quello da cui abbiamo iniziato, ecc. ecc.*
2. *usare le parentesi nell'espressione parafrasata per assicurare che la leggibilità di questa sia univoca.*

3.3 Le regole dei *tableaux*

Inizieremo adesso la descrizione rigorosa della procedura che ci consentirà di decidere se gli argomenti appartenenti ad una certa classe sono validi. Questa procedura consiste nella costruzione di *tableaux* relativi ad insiemi di asserzioni che sono insiemi controesempio di argomenti.

Nota Bene 3.3.1 *Per costruire il* tableau *di un insieme di asserzioni* $\mathfrak{G}$ *bisogna essere in grado di:*

1. *descrivere, data una* $A \in \mathfrak{G}$, *le situazioni* Σ *in cui* A *è vera usando soltanto asserzioni che hanno un grado di complessità logica strettamente inferiore a quello di* A;

2. *decidere, dato un insieme* $\mathfrak{E}$ *i cui elementi sono esclusivamente asserzioni atomiche e/o negazioni di asserzioni atomiche, se* $\mathfrak{E}$ *è coerente.*

Definizione 3.3.1 (Complessità logica di un'asserzione) *La complessità logica di un'asserzione* A *completamente parafrasata è espressa dal numero di funtori di verità che occorrono in* A.

Il problema 2 posto nel **N.B. 3.3.1** è banale se $\mathfrak{E}$ è un insieme finito. Infatti, la seguente procedura decide la questione in un numero finito di passi: Enumera da 1 ad n gli elementi di $\mathfrak{E}$, e cioè scrivi $E_1, \ldots, E_n$; poi confronta E_1 con E_2, poi con E_3,..., poi con E_n per vedere se qualcuna di queste asserzioni è uguale a $\neg E_1$. Se questo è il caso allora $\mathfrak{E}$ è incoerente. Altrimenti confronta E_2 con E_3,..., poi con E_n, ecc. ecc. Se $\mathfrak{E}$ non contiene un'asserzione E e la sua negazione $\neg E$ allora $\mathfrak{E}$ è coerente.

Il numero massimo di confronti da fare (sopratutto nel caso in cui $\mathfrak{E}$ è coerente) è:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n-1) &= \frac{n - 1((n-1)+1)}{2} && (3.1) \\ &= \frac{(n-1)n}{2}. && (3.2) \end{aligned}$$

Il problema 1 viene, invece, risolto per mezzo della costruzione di *tableaux* da effettuarsi secondo le seguenti **regole di derivazione**:

$$\begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array}$$

La giustificazione della regola di derivazione appena descritta è fornita dalla seguente tavola di verità. (**Perchè?**)

ϕ	$\neg$	$\neg$	ϕ
V	V	F	V
F	F	V	F

$$\begin{array}{c} (\phi \wedge \psi) \\ | \\ \phi \\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi \wedge \psi) \\ \bigwedge \\ \neg\phi \quad \neg\psi \end{array}$$

Le regole di derivazione relative a $(\phi \wedge \psi)$ e a $\neg(\phi \wedge \psi)$ sono giustificate dalla seguente tavola di verità. (**Perchè?**)

ϕ	ψ	$\neg$	$(\phi \wedge \psi)$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

$$\begin{array}{c} (\phi \vee \psi) \\ \bigwedge \\ \phi \quad \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi \vee \psi) \\ | \\ \neg\phi \\ \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\phi \rightarrow \psi) \\ \bigwedge \\ \neg\phi \quad \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\phi \rightarrow \psi)\\ | \\ \phi \\ \neg\psi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}(\phi \leftrightarrow \psi)\\ \bigwedge \\ \begin{array}{cc}\phi & \neg\phi \\ \psi & \neg\psi\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\phi \leftrightarrow \psi)\\ \bigwedge \\ \begin{array}{cc}\phi & \neg\phi \\ \neg\psi & \psi\end{array}\end{array}$$

Esercizio: Individuare la tavola di verità che giustifica le regole di derivazione per '$\vee$'.

Esercizio: Individuare la tavola di verità che giustifica le regole di derivazione per '$\rightarrow$'.

Esercizio: Individuare la tavola di verità che giustifica le regole di derivazione per '$\leftrightarrow$'.

Nota Bene 3.3.2 *:*

- *Come nel caso delle tavole di verità dei funtori di verità più importanti, è* **FONDAMENTALE** *imparare a memoria le regole di derivazione dei* tableaux.

- *Per quanto riguarda le regole di derivazione relative a '$\rightarrow$' e a '$\leftrightarrow$' sembra che nel caso in cui ψ sia atomica non si abbia una diminuzione della complessità della fbf a cui si è applicata la regola di derivazione. È possibile, invece, rendersi conto che questo è il caso se consideriamo che $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$ e che $(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$.*

Teorema 3.3.1 *Se $C(A)$ è la complessità di un'asserzione completamente parafrasata A, allora: (1) $C(\neg A) > C(A)$ e (2) $C(A * B) > C(A)$ e $C(A * B) > C(B)$, dove $*$ è un funtore di verità binario.* □

3.4 Interpretazioni

Dal momento che la validità di un argomento $\mathfrak{A}$ dipende interamente dalla sua forma logica, uno degli scopi che ci dobbiamo prefiggere è quello di far emergere la forma logica di $\mathfrak{A}$ mediante l'eliminazione del significato delle asserzioni $A \in \mathfrak{A}$. Siamo in grado di fare ciò mediante l'uso di un'**interpretazione**.

Definizione 3.4.1 (Interpretazione) *Un'**interpretazione** è un insieme finito $\mathcal{I}$ di lettere maiuscole appartenenti ad un dato alfabeto $\mathcal{A}$ tali che a ciascuna lettera viene associata una e una sola asserzione.*

Esempio 3.4.1 (Procedura di decisione per la validità di $\mathfrak{A}$) *:*

$\mathfrak{A}$ *Se l'Utilitarismo è vero, e se il credere in esso previene la gente dal massimizare la felicità, è meglio non credere in esso. Ma se, d'altro canto, l'Utilitarismo è falso, è certamente meglio non credere in esso. Quindi è meglio non credere in esso.*

Interpretazione $\mathcal{I} = \{P, Q, R,\}$ *e*

$$
\begin{array}{lll}
P & \mapsto & \textit{L'utilitarismo è vero} \\
Q & \mapsto & \textit{Il credere nell'Utilitarismo previene la gente dal massimizare la felicità} \\
R & \mapsto & \textit{È meglio non credere nell'Utilitarismo}
\end{array}
$$

Traduzione di $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{L}_0$:

$$((P \wedge Q) \to R), (\neg P \to R) \models R.$$

Traduzione di $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ in $\mathcal{L}_0$:

$$\{((P \wedge Q) \to R), (\neg P \to R), \neg R\}.$$

Tableau *:*

$$
\begin{array}{ll}
\surd_2 & ((P \wedge Q) \to R) \\
\surd_1 & (\neg P \to R) \\
 & \neg R \\
 & \bigwedge \\
 & \surd_4\ \neg\neg P \quad \underline{R} \\
 & \bigwedge \\
 & \surd_3\ \neg(P \wedge Q) \quad \underline{R} \\
 & \bigwedge \\
 & \underline{\neg P} \quad \neg Q \\
 & \qquad\ \ | \\
 & \qquad\ \ P
\end{array}
$$

Conclusione *Il* tableau *di cui sopra dimostra che l'insieme* $\{((P \wedge Q) \rightarrow R), (\neg P \rightarrow R), \neg R\}$ *è coerente e che, quindi,* $((P \wedge Q) \rightarrow R), (\neg P \rightarrow R) \not\models R$. *Da ciò segue che* $\mathfrak{A}$ *non è valido.*

Nota Bene 3.4.1 *:*

- *Dato l'insieme* $\mathcal{A}$ *i cui elementi sono tutte e soltanto le asserzioni atomiche, e cioè* $\mathcal{A} = \{x \mid x$ *è un'asserzione atomica*$\}$, *se consideriamo la struttura* Σ *che attribuisce il valore di verità* V *a tutte e soltanto le asserzioni atomiche che appaiono come nodi di un ramo aperto di un* tableau *che è stato completato e il valore di verità F a tutte le altre asserzioni atomiche appartenenti ad* $\mathcal{A}$, *allora tutte le asserzioni contenute nella radice del* tableau *sono vere in* Σ.

3.5 La sintassi del Calcolo Proposizionale

Chiamiamo $\mathcal{L}_0$ il linguaggio del Calcolo Proposizionale. $\mathcal{L}_0$ è caratterizzato dall'alfabeto $\mathcal{A}_0$, dove $\mathcal{A}_0 = \{\mathrm{P}, \circ, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ e da una **grammatica non contestuale**, $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$, che determina le espressioni grammaticalmente corrette, le **formule ben formate** (fbf), di $\mathcal{L}_0$.

Anche $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$ ha un alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}} = \{\mathrm{Fmla}, \mathrm{Indx}, \Rrightarrow, \mathrm{P}, \circ, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$. Fmla e Indx sono le **variabili** di $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$ e, in particolare, Fmla è chiamata la **variabile designata** di $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$. Le $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}}$ tali che $x \in \mathcal{A}_0$ si chiamano **simboli terminali**.

Le **regole di riscrittura** di $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$ sono:

$$
\begin{array}{rlcl}
(\mathbf{1}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & \neg\mathrm{Fmla} \\
(\mathbf{2}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & (\mathrm{Fmla} \wedge \mathrm{Fmla}) \\
(\mathbf{3}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & (\mathrm{Fmla} \vee \mathrm{Fmla}) \\
(\mathbf{4}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & (\mathrm{Fmla} \rightarrow \mathrm{Fmla}) \\
(\mathbf{5}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & (\mathrm{Fmla} \leftrightarrow \mathrm{Fmla}) \\
(\mathbf{6}) & \mathrm{Fmla} & \Rrightarrow & \mathrm{P}\ \ \mathrm{Indx} \\
(\mathbf{7}) & \mathrm{Indx} & \Rrightarrow & \mathrm{Indx}\ \ \mathrm{Indx} \\
(\mathbf{8}) & \mathrm{Indx} & \Rrightarrow & \circ
\end{array}
$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$ genera tutte e soltanto le fbf di $\mathcal{L}_0$ nel modo seguente:

1. Scrivere la variabile designata.

2. Individuare una variabile già scritta, trovare una regola (**n**) di $\mathcal{G}_{\mathcal{L}_0}$, per $1 \leq n \leq 8$, che inizia con quella variabile, sostituire al posto della variabile già scritta l'espressione che si trova alla destra del simbolo $\Rrightarrow$ in (**n**).

3. Ripetere il passo 2. di queste istruzioni su ciò che abbiamo appena scritto (o riscritto!) finchè non abbiamo eliminato tutte le variabili.

Esempio 3.5.1 ((($\mathbf{P}_\circ \wedge \mathbf{P}_\circ) \wedge \mathbf{P}_\circ$) è una fbf di $\mathcal{L}_0$.) *:*

1. *Fmla* [**variabile designata**]

2. $(Fmla \wedge Fmla)$ [**(2)**]

3. $((Fmla \wedge Fmla) \wedge Fmla)$ [**(2)**]

4. $((P\ Indx \wedge P\ Indx) \wedge P\ Indx)$ [**(6)**]

5. $((P_\circ \wedge P_\circ) \wedge P_\circ)$ [**(8)**]

La serie di sostituzioni descritta nell'**Esempio 3.5.1** si chiama **derivazione**.

Esempio 3.5.2 $(P_{\circ\circ\circ})$ *non è una fbf di* $\mathcal{L}_0$, *perchè?*

In quanto segue, invece di usare le espressioni ingombranti $\mathrm{P}_\circ, \mathrm{P}_{\circ\circ}, \mathrm{P}_{\circ\circ\circ}, \ldots$ useremo S, P, Q, R, ... per rappresentare asserzioni atomiche e $\phi, \psi, \chi, \ldots$ come variabili proposizionali.

3.6 La semantica del Calcolo Proposizionale

Definizione 3.6.1 (Struttura) *Una **struttura** $\mathbf{\Sigma}$ è un'assegnazione di valori di verità* V/F *a tutte le proposizioni atomiche che occorrono in una fbf* ϕ *di* $\mathcal{L}_0$.

Esempio 3.6.1 ($\phi = (((S \wedge P) \wedge Q) \wedge R)$)

$\mathbf{\Sigma}$	S	P	Q	R	$(((S \wedge P) \wedge Q) \wedge R)$
$\mathbf{\Sigma_1}$	V	V	V	V	V
$\mathbf{\Sigma_2}$	V	V	V	F	F
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{\Sigma_{16}}$	F	F	F	F	F

Definizione 3.6.2 *Si dice che una fbf* ϕ *di* $\mathcal{L}_0$ *è* ***definita*** *in una struttura* $\mathbf{\Sigma}$ *se ad ogni lettera* P*—che sta per un'asserzione atomica—occorrente in* ϕ *viene assegnato un valore di verità in* $\mathbf{\Sigma}$.

Definizione 3.6.3 *Una fbf* ϕ *di* $\mathcal{L}_0$ *definita in una struttura* $\mathbf{\Sigma}$ *ha un determinato valore di verità in* $\mathbf{\Sigma}$*; se questo valore di verità è* V*, diciamo che* ϕ ***è vera in*** $\mathbf{\Sigma}$*; se è* F*, diciamo che* ϕ ***è falsa in*** $\mathbf{\Sigma}$.

Nota Bene 3.6.1 *:*

- *Data una fbf* ϕ *di* $\mathcal{L}_0$*, la tavola di verità di* ϕ *ci dice il valore di verità che* ϕ *ha in ciascuna struttura* $\mathbf{\Sigma}$ *in cui è definita.*

Teorema 3.6.1 *Sia* ϕ *una fbf. di* $\mathcal{L}_0$ *tale che* ϕ *contiene* n *lettere* P *distinte l'una dall'altra. In questo caso esistono* 2^n *distinte strutture* $\mathbf{\Sigma}$ *in cui* ϕ *è definita.*

Se ϕ contiene soltanto una lettera P allora o $\phi = P$ o $\phi = (P \vee P)$ ecc. ecc. In ogni caso, come risulta chiaramente dalla tavola di verità di ϕ, vi sono soltanto due strutture distinte in cui ϕ è definita: $\mathbf{\Sigma}_1(P) = V$ e $\mathbf{\Sigma}_2(P) = F$; e dal momento che $2 = 2^1$ il teorema vale in questo caso.

Assumiamo che il teorema sia vero per fbf ϕ contenenti n lettere P distinte l'una dall'altra e dimostriamo che il teorema deve essere vero anche per fbf ϕ contenenti $n + 1$ lettere P distinte l'una dall'altra.

Consideriamo che: (1) ogni struttura $\mathbf{\Sigma}^{n+1}$, che assegna valori di verità ad $n+1$ lettere P distinte l'una dall'altra, può essere ottenuta da una struttura $\mathbf{\Sigma}^n$ estendendola ad una lettera P_{n+1} distinta dalle n lettere già 'valutate' da $\mathbf{\Sigma}^n$; e che (2) estendendo una struttura $\mathbf{\Sigma}^n$ ad una lettera P_{n+1} distinta dalle n lettere già 'valutate' da $\mathbf{\Sigma}^n$ possiamo ottenere soltanto 2 distinte strutture $\mathbf{\Sigma}^{n+1}$ e cioè da:

$$\mathbf{\Sigma}(P_1), \ldots, \mathbf{\Sigma}(P_n)$$

possiamo ottenere soltanto:

$$\mathbf{\Sigma}^*(P_1), \ldots, \mathbf{\Sigma}^*(P_n), \mathbf{\Sigma}^*(P_{n+1}) = V$$

e

$$\mathbf{\Sigma}^{**}(P_1), \ldots, \mathbf{\Sigma}^{**}(P_n), \mathbf{\Sigma}^{**}(P_{n+1}) = F,$$

dove $\mathbf{\Sigma}(P_i) = \mathbf{\Sigma}^*(P_i) = \mathbf{\Sigma}^{**}(P_i)$, per $1 \leq i \leq n$.

Da ciò segue che il numero totale di strutture $\mathbf{\Sigma}^{n+1}$ è: $2^n \times 2 = 2^{n+1}$. $\Box$

Definizione 3.6.4 (Coerenza di un insieme finito di fbf di $\mathcal{L}_0$) *Se Γ è un insieme finito di fbf di $\mathcal{L}_0$, scriviamo*

$$\Gamma \models$$

quando non esiste una struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui ***tutte*** *le fbf di Γ* ***sono definite e sono tutte vere*** *(in $\mathbf{\Sigma}$). L'espressione '$\Gamma \models$' si legge: l'insieme Γ è* ***semanticamente incoerente****. Si dice che Γ è semanticamente coerente se $\Gamma \not\models$. Il simbolo '$\models$' si chiama* ***porta semantica****.*

Considerate che scrivere $\Gamma \models$ è equivalente a scrivere $\Gamma \models \emptyset$, e cioè è equivalente ad asserire che: in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui $\mathbf{\Sigma}(\phi) = V$, per ogni $\phi \in \Gamma$, allora $\mathbf{\Sigma}(\psi) = V$, per ogni $\psi \in \emptyset$.

Ora dal momento che, data una qualsiasi struttura $\mathbf{\Sigma}$, è vero che tutte le fbf appartenenti a $\emptyset$ sono false in $\mathbf{\Sigma}$—perché altrimenti dovrebbe esistere almeno un fbf $\phi \in \emptyset$ tale che $\Sigma(\phi) = V$ e questo è impossibile perchè $\emptyset$ è l'insieme vuoto—ne segue che se $\Gamma \models \emptyset$ allora Γ deve essere incoerente. Infatti, in caso contrario, esisterebbe almeno una struttura $\mathbf{\Sigma}$ tale che $\mathbf{\Sigma}(\phi) = V$, per ogni $\phi \in \Gamma$, e $\mathbf{\Sigma}(\psi) = F$, per ogni $\psi \in \emptyset$.

Definizione 3.6.5 (Validità in $\mathcal{L}_0$) *Se Γ è un insieme finito di fbf di $\mathcal{L}_0$, e ϕ è una fbf di $\mathcal{L}_0$, scriviamo*

$$\Gamma \models \phi$$

quando non esiste una struttura $\mathbf{\Sigma}$ tale che:

1. *tutte le fbf appartenenti a Γ e ϕ sono definite in $\mathbf{\Sigma}$;*
2. *tutte le fbf appartenenti a Γ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$;*
3. *ϕ è falsa in $\mathbf{\Sigma}$.*

'$\Gamma \models \phi$ si legge: Γ ***implica semanticamente*** *ϕ.*

Teorema 3.6.2 *$\Gamma \models \phi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \models$* □

Nota Bene 3.6.2 *:*

- *Se A e B sono insiemi $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.*
- *Se Γ è un insieme di fbf di $\mathcal{L}_0$, ϕ è anche una fbf appartenente a $\mathcal{L}_0$, $\Gamma \models \phi$ e $\Gamma = \emptyset$ allora scriviamo*

  $$\models \phi$$

  per indicare che ϕ è vera in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui è definita. ***(Perchè?)*** *Questo è un modo di esprimere la nozione di verità necessaria (non è possibile che ϕ sia falsa) in $\mathcal{L}_0$. '$\models \phi$' si legge: ϕ* ***è una tautologia****.*

- *La tautologia può essere anche chiamata 'verità logica' o 'verità universale', perchè come la logica è applicabile al pensiero deduttivo relativo a qualsiasi ambito, così la verità di una tautologia prescinde dall'ambito (struttura) in cui questa è definita.*

- *Espressioni ben formate contenenti occorrenze di fbf di $\mathcal{L}_0$ e del simbolo '$\models$' sono chiamate* ***sequenti semantici****.*

- *I sequenti semantici non sono fbf di $\mathcal{L}_0$, perchè il simbolo '$\models$' non appartiene ad $\mathcal{A}_0$.*

- *Un sequente semantico può essere* ***corretto*** *o meno. Se un sequente semantico non è corretto esiste almeno una struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui tutte le fbf del sequente sono definite ed è tale che tutte le fbf alla sinistra di $\models$ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$ e quella alla destra di $\models$ è falsa in $\mathbf{\Sigma}$. Questa struttura $\mathbf{\Sigma}$ è chiamata il* ***controesempio*** *del sequente. Un sequente è corretto se e solo se non ha un controesempio.*

- *Le tavole di verità ci mettono a disposizione un metodo semplice per controllare la correttezza dei sequenti.*

Esiste una tecnica semplice per trovare dei controesempi di sequenti semantici.

Esempio 3.6.2 (Controesempi di sequenti semantici)

P	Q	$((P$	$\wedge$	$\neg$	$P)$	$\rightarrow$	$Q)$	$\models$	$\neg$	Q
V	V	V	F	F	V	V	V	**NC**	F	V
V	F									
F	V									
F	F									

Il controesempio di un sequente semantico $P_1, \ldots, P_n \models C$ può essere trovato anche con la tecnica dei *tableaux*. Come?

Nota Bene 3.6.3 (Molto importante) *:*

1. *Supponiamo di avere tradotto, per mezzo di un'interpretazione adatta, delle asserzioni in italiano in fbf di $\mathcal{L}_0$, sia Γ l'insieme di queste fbf. Se $\Gamma \models$, allora l'insieme delle asserzioni in lingua italiana è incoerente. In quanto, se ciò non fosse vero, le asserzioni sarebbero tutte vere in qualche situazione Σ e questa situazione, mediante l'interpretazione, individuerebbe una struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui tutte le fbf di Γ sarebbero vere.*

2. ***Ma se, invece, un insieme di asserzioni in lingua italiana è incoerente, ciò non implica che lo debba anche essere l'insieme*** Γ ***delle loro traduzioni in*** $\mathcal{L}_0$***, in quanto l'incoerenza dell'insieme delle asserzioni in lingua italiana potrebbe dipendere da fattori che non hanno nulla a che fare con i funtori di verità.***

3. Le stesse considerazioni di cui sopra si applicano agli argomenti.

Esempio 3.6.3 (N.B. 3.6.3-2) $\mathcal{A} = \{$*Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, Socrate non è mortale*$\}$ ***incoerente;*** $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{B}, \overline{C}, \neg\overline{D}\}$ ***coerente.***

Esempio 3.6.4 (N.B. 3.6.3-3) *Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo* $\therefore$ *Socrate è mortale* ***valido;*** $\overline{B}, \overline{C} \models \overline{D}$ ***non corretto.***

3.7 Esercizi

1. Dove questo è possibile, e senza che vi sia una grande mancanza di accuratezza, usate i funtori di verità $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ per parafrasare le seguenti affermazioni rimuovendo i riferimenti incrociati. Dire in quali casi la parafrasi è impossibile.

   (a) Fallo ancora e mi farai infuriare.

   (b) Dio ci ama ed è onnipotente, eppure permette che la gente soffra.

   (c) Non è che non apprezzi il tuo aiuto.

   (d) Ciò che hai appena detto ha come conseguenza che il bene assoluto non esiste, ma in questo caso la tua definizione di partenza non può essere giusta.

   (e) Se adesso si fosse rimangiato la parola, lei non si sarebbe mai più fidata di lui; ma visto come sono andate le cose, lui può continuare a contare sulla sua fiducia.

   (f) Giuseppe può mangiare la torta o il gelato, ma non entrambe le cose.

2. Traducete il seguente argomento in un sequente corretto del calcolo proposizionale, menzionando ogni difficoltà e ogni punto interessante, dimostrando la sua correttezza per mezzo del metodo dei *tableaux*.

   > Se Manzolini diventa ministro dell'Università, possiamo essere sicuri che la qualità dei pasti serviti alle mense universitarie non migliorerà e che non ci sarà un incremento nel numero delle borse di studio. Il ministro dell'Università, però,

riuscirà a tenere la situazione tranquilla nel mondo universitario solo se vi sarà un incremento nel numero delle borse di studio; e appare chiaro che il ministro debba tenere la situazione tranquilla nel mondo universitario o ci sarà una rivolta. Ora, si dice che la qualità dei pasti serviti alle mense universitarie probabilmente migliorerà. Ma anche in questo caso, dato quello che è stato appena detto, vi sarà sicuramente una rivolta a meno che Manzolini non venga *trombato* come candidato ministro dell'Università.

- È importante, ai fini della validità dell'argomento di cui sopra, che la qualità del cibo migliori nelle mense universitarie?

3. Inserite delle parentesi nella seguente stringa (α) di simboli in quattro modi differenti in modo tale da produrre una formula che è:

   (a) una tautologia;

   (b) una contraddizione;

   (c) una formula equivalente a P;

   (d) una formula equivalente a $\neg$P.

$$(\alpha) \qquad \neg \mathrm{P} \vee \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}.$$

4. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni o che questa vale per ogni insieme finito Γ di fbf di $\mathcal{L}_0$ e ogni singola fbf $\phi \in \mathcal{L}_0$ o producete un controesempio.

   (a) Se Γ è semanticamente coerente e $\Gamma \models \phi$, allora $\Gamma \cup \{\phi\}$ è semanticamente coerente.

   (b) Se $\Gamma \cup \{\phi\}$ è semanticamente incoerente, ma Γ è semanticamente coerente, allora $\Gamma \not\models \phi$.

   (c) Se $\Gamma \not\models \phi$ allora Γ è semanticamente coerente, ma $\Gamma \cup \{\phi\}$ è semanticamente incoerente.

   (d) Se Γ è semanticamente coerente e $\Gamma \models \neg\phi$, allora $\Gamma \cup \{\phi\}$ è semanticamente incoerente.

Chapter 4

Il calcolo proposizionale II

4.1 Introduzione

Lo scopo principale di questa lezione è quello di continuare a studiare le proprietà sintattiche e semantiche del calcolo proposizionale. Questo tipo di indagine ci condurrà, nella quinta lezione, a dimostrare l'**adeguatezza** del calcolo proposizionale (**Corollario 5.4.1**).

L'adeguatezza del calcolo proposizionale consiste nel fatto che l'insieme dei suoi teoremi coincide con l'insieme delle tautologie. In altre parole, il calcolo proposizionale è adeguato, perchè in esso si dimostrano tutte e soltanto le verità logiche esprimibili nel suo linguaggio.

4.2 Alcune proprietà dell'implicazione semantica

Il seguente elenco di **meta-teoremi** ci fornisce delle informazioni utili riguardanti la validità di certi argomenti formulati in lingua italiana.

Nota Bene 4.2.1 *:*

- *Il modello matematico di un argomento* $\mathfrak{A}$ *è il suo corrispondente sequente semantico.*

- *La distinzione tra teoria-oggetto e meta-teoria non è utile soltanto per tenere distinte cose diverse l'una dall'altra, ma anche perchè ci consente di evitare paradossi simili a quello innescato dalla frase: Questa proposizione è falsa.*

- *La distinzione tra teoria-oggetto e meta-teoria è stata introdotta da Alfred Tarski.*

Teorema 4.2.1 (Espansione) *Se Γ e Δ sono insiemi finiti, possibilmente vuoti, di fbf di $\mathcal{L}_0$ e ϕ è una fbf di $\mathcal{L}_0$, allora:*

$$\textit{se}\ \Gamma \models \phi\ \textit{allora}\ \Gamma \cup \Delta \models \phi.$$

Ammettiamo che ci sia una struttura $\mathbf{\Sigma}$ tale che tutte le fbf $\psi \in \Gamma \cup \Delta$ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$ e ϕ è falsa in $\mathbf{\Sigma}$. Allora, in particolare, avremo che, se $\chi \in \Gamma$ χ è vera in $\mathbf{\Sigma}$ e ϕ è falsa in $\mathbf{\Sigma}$. Ma questo implica che $\Gamma \not\models \phi$ contraddicendo l'ipotesi che $\Gamma \models \phi$. Da ciò segue che una tale struttura $\mathbf{\Sigma}$ non può esistere e che, quindi, $\Gamma \cup \Delta \models \phi$. $\square$

Nota Bene 4.2.2 (Monotonicità) *Il* ***Teorema di Espansione*** *ci fa vedere che un argomento valido non può essere reso non valido mediante l'aggiunta di nuove premesse. Questa proprietà dell'implicazione logica utilizzata all'interno della logica classica si chiama* ***monotonicità****. Esistono, tuttavia, delle* ***logiche non monotone****.*

Esempio 4.2.1 (Implicazione non monotona) *Se assumiamo che le premesse dei due seguenti argomenti costituiscono l'insieme di conoscenze a disposizione di Edipo in due situazioni diverse, allora osserviamo che:*

- *Dal fatto che Edipo ha un'altissima concezione del suo onore e che Laio offende gravemente Edipo* ***è plausibile che segua che*** *Edipo uccide Laio.*

- *Dal fatto che Edipo ha un'altissima concezione del suo onore, Laio offende gravemente Edipo e che Laio è il padre di Edipo* ***non è plausibile che segua che*** *Edipo uccide Laio.*

Teorema 4.2.2 (Proiezione) *Se Γ è un insieme finito di fbf di $\mathcal{L}_0$ e $\phi \in \Gamma$ allora $\Gamma \models \phi$.*

Dal momento che $\phi \in \Gamma$, avremo che per ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui tutte le fbf di Γ sono vere anche ϕ sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$. $\square$

Nota Bene 4.2.3 *:*

- *Il* ***Teorema di Proiezione*** *ci dice che se la conclusione C di un argomento $\mathfrak{A}$ è una delle premesse di $\mathfrak{A}$, e cioè $C = P_i$, dove $1 \leq i \leq n$, allora $\mathfrak{A}$ è valido.*

- *Osserviamo che un tale argomento, malgrado la sua validità, non risulta essere molto utile. Ci sono diversi casi in filosofia di argomenti di questo genere. Uno dei più famosi è l'argomento della 'stanza cinese' di John Searle.*

Teorema 4.2.3 (Taglio) *Se Γ è un insieme finito di fbf di $\mathcal{L}_0$ e ϕ e ψ sono anche loro fbf di $\mathcal{L}_0$ allora:*

$$\textit{se } \Gamma \models \phi \ \textit{ e } \ \Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \ \textit{ allora } \ \Gamma \models \psi.$$

Sia $\mathbf{\Sigma}$ una qualunque struttura in cui tutte le fbf appartenenti a Γ sono vere. Dal momento che $\Gamma \models \phi$, avremo che anche ϕ sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$; e siccome sappiamo che $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$, dal fatto che sia tutte le fbf appartenenti a Γ che ϕ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$ possiamo concludere che anche ψ è vera in $\mathbf{\Sigma}$. Da ciò segue che $\Gamma \models \psi$. □

Teorema 4.2.4 (Transitività di $\models$) *Se ϕ, ψ, χ sono fbf di $\mathcal{L}_0$ allora:*

$$\textit{se } \ \phi \models \psi \ \textit{ e } \ \psi \models \chi \ \textit{ allora } \ \phi \models \chi.$$

Sia $\mathbf{\Sigma}$ una qualunque struttura in cui ϕ è vera. Dal momento che $\phi \models \psi$ avremo che anche ψ sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$. Ora il fatto che ψ è vera in $\mathbf{\Sigma}$ assieme all'altra ipotesi che $\psi \models \chi$ implica che χ è vera in $\mathbf{\Sigma}$. Da ciò segue che $\phi \models \chi$.
□

Definizione 4.2.1 (Schema di sostituzione) *Uno schema di sostituzione σ è ciò che stabilisce, dato un insieme di lettere—simboli che stanno per asserzioni atomiche—$\{S, P, Q, R, \ldots\}$, come associare a ciascuna delle lettere dell'insieme una ed una sola fbf di $\mathcal{L}_0$.*

Esempio 4.2.2 (Schema di sostituzione σ)

$$\begin{array}{rcl} \sigma(P) & = & (R \to S) \\ \sigma(Q) & = & (T \vee V) \end{array}$$

Il seguente è un esempio di una sostituzione operata nel sequente s_1 utilizzando lo schema di sostituzione σ:

$$\begin{array}{c|rcl} s_1 & (P \to Q), \neg Q & \models & \neg P \\ \hline s_2 & ((R \to S) \to (T \vee V)), \neg(T \vee V) & \models & \neg(R \to S) \end{array}$$

Definizione 4.2.2 (Sostituzioni) *Quando uno schema di sostituzione σ viene applicato ad un sequente semantico s_1 per produrre un sequente semantico s_2, s_2 è chiamato σ-**sostituzione** di s_1.*

Teorema 4.2.5 (Sostituzione) *Se s_1 è un sequente corretto, ogni σ-sostituzione di s_1 è un sequente corretto.*

Assumiamo che s_2 sia una σ-sostituzione di un sequente s_1. Se s_2 non è un sequente corretto esisterà una struttura $\mathbf{\Sigma}$ tale che tutte le premesse di s_2 sono vere in $\mathbf{\Sigma}$ e la conclusione di s_2 è falsa in $\mathbf{\Sigma}$.

Consideriamo, adesso, la struttura $\mathbf{\Sigma}^*$ che è uguale a $\mathbf{\Sigma}$ tranne per il fatto che tutte le lettere che compaiono come argomenti P di σ hanno in $\mathbf{\Sigma}^*$ lo stesso valore di verità che $\sigma(P)$ ha in $\mathbf{\Sigma}$. Da questo segue che le premesse di s_1 saranno tutte vere in $\mathbf{\Sigma}^*$ mentre la conclusione di s_1 sarà falsa in $\mathbf{\Sigma}^*$, e che, quindi, anche s_1 sarà non corretto. $\square$

Nota Bene 4.2.4 *Il **Teorema di Sostituzione** sembra suggerire che prendendo un qualsiasi argomento valido $\mathfrak{A}$ e **rimpiazzando uniformemente** ogni occorrenza in $\mathfrak{A}$ di qualche asserzione atomica P per mezzo di un'altra asserzione Φ noi otteniamo un argomento valido. **È importante sottolineare che questo è vero soltanto nel caso in cui $\mathfrak{A}$ è un argomento che può essere formalizzato come un sequente semantico corretto di $\mathcal{L}_0$.***

Le cose non stanno così per quanto riguarda argomenti $\mathfrak{A}$ la cui validità dipende da caratteristiche non rappresentabili in $\mathcal{L}_0$. Anche la minima sostituzione può compromettere la validità di argomenti appartenenti a questa classe.

Esempio 4.2.3 *:*
*(A) Giovanni è più alto di Francesco, (B) Francesco è più alto di Giacomo $\therefore$ (C) Giovanni è più alto di Giacomo. (**Valido**)*

$$\begin{array}{lcl}
\sigma(A) & = & \textit{Sopra la panca la capra campa} \\
\sigma(B) & = & \textit{Sopra la panca la capra campa o sotto la panca la capra crepa} \\
\sigma(C) & = & \textit{Sotto la panca la capra crepa.}
\end{array}$$

*Sopra la panca la capra campa, Sopra la panca la capra campa o sotto la panca la capra crepa $\therefore$ Sotto la panca la capra crepa. (**Non valido**)*

Definizione 4.2.3 (Equivalenza logica) *Se ϕ e ψ sono fbf di $\mathcal{L}_0$, diciamo che ϕ è **logicamente equivalente a** ψ, e scriviamo $\phi \equiv \psi$, se e solo se:*

$$\phi \models \psi \ \text{ e } \ \psi \models \phi.$$

Nota Bene 4.2.5 *Attenzione! Asserire che, date due fbf ϕ e ψ di $\mathcal{L}_0$, $\phi \equiv \psi$ è diverso dall'asserire che $\phi = \psi$.*

Teorema 4.2.6 (Riflessività di $\equiv$) *Se ϕ è una fbf di $\mathcal{L}_0$ allora $\phi \equiv \phi$.* □

Teorema 4.2.7 (Simmetria di $\equiv$) *Se ϕ e ψ sono fbf di $\mathcal{L}_0$ allora se $\phi \equiv \psi$ avremo che $\psi \equiv \phi$.* □

Teorema 4.2.8 (Transitività di $\equiv$) *Se ϕ, ψ e χ sono fbf di $\mathcal{L}_0$ allora se $\phi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \chi$ avremo che $\phi \equiv \chi$.* □

Definizione 4.2.4 *: Chiamiamo **parola su** $\mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ è l'alfabeto di $\mathcal{L}_0$) una qualunque concatenazione finita di elementi di $\mathcal{A}_0$. Sia $\mathcal{W}_{\mathcal{A}_0}$ l'insieme di tutte le parole su $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{A}_0}$ tale che se $\phi \in \mathcal{W}_0$ allora ϕ è una fbf di $\mathcal{L}_0$. Chiamiamo $\mathcal{W}_0$ l'insieme delle **parole proprie** di $\mathcal{L}_0$.*

Teorema 4.2.9 (Tavole di verità e $\equiv$) *Se $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathcal{W}_0$ allora $\phi \equiv \psi$ se e solo se ϕ e ψ hanno la stessa tavola di verità.* □

Nota Bene 4.2.6 *L'importanza del **Teorema 4.2.9** sta nel fatto che questo risultato ci mette a disposizione una procedura di decisione relativa all'esistenza o meno di una relazione di equivalenza logica tra due qualsiasi parole proprie ϕ e ψ di $\mathcal{L}_0$.*

Teorema 4.2.10 (Congruenza di $\equiv$) *Se s_2 è un sequente semantico ottenuto rimpiazzando ogni $\phi \in \mathcal{W}_0$ appartenente ad un sequente semantico corretto s_1 per mezzo di una $\psi \in \mathcal{W}_0$ tale che $\phi \equiv \psi$, allora anche s_2 è corretto.* □

Teorema 4.2.11 *Se $\psi \in \mathcal{W}_0$ e:*

1. *ϕ è una sottoformula di ψ;*
2. *$\phi' \in \mathcal{W}_0$ è tale che $\phi \equiv \phi'$;*
3. *$\psi' \in \mathcal{W}_0$ ed è ottenuta sostituendo una o più occorrenze di ϕ in ψ con ϕ';*

allora $\psi \equiv \psi'$. □

Nota Bene 4.2.7 *Dal momento che $((\phi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\phi \wedge (\psi \wedge \chi))$, possiamo scrivere semplicemente $(\phi \wedge \psi \wedge \chi)$. Stessa cosa dicasi per $((\phi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\phi \vee (\psi \vee \chi))$. Nel caso del funtore di verità $\rightarrow$, però, le cose stanno diversamente. Infatti,*

$$((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \not\equiv (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)).$$

Perché?

Teorema 4.2.12 (Completezza funtoriale di $\mathcal{L}_0$) *Qualsiasi funtore di verità $\odot$ venga aggiunto a $\mathcal{L}_0$ questo produce soltanto fbf che sono logicamente equivalenti ($\equiv$) a fbf che sono già presenti in $\mathcal{L}_0$.*

Supponiamo di avere un funtore di verità $\odot(P_1, \ldots, P_n)$ che contiene soltanto n lettere P distinte l'una dall'altra, per $n \in \mathbb{N}$. La sua tavola di verità sarà, dunque:

$\mathbf{\Sigma}$	P_1	$\cdots$	P_n	$\odot(P_1, \ldots, P_n)$
$\mathbf{\Sigma}_1$	V	$\cdots$	V	✠
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{\Sigma}_{2^n}$	F	$\cdots$	F	✠

dove ✠ $= V$ o ✠ $= F$.

Dato il **Teorema 4.2.9**, il nostro compito si riduce a quello di trovare una $\psi \in \mathcal{W}_0$ che abbia la stessa tavola di verità di $\odot(P_1, \ldots, P_n)$.

Ora, data la tavola di verità di $\odot(P_1, \ldots, P_n)$, ci sono due possibilità:

1. $\odot(P_1, \ldots, P_n)$ assume il valore di verità F in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}_i$, per $1 \leq i \leq 2^n$.

2. esiste almeno un i, per $1 \leq i \leq 2^n$, tale che $\odot(P_1, \ldots, P_n)$ assume il valore di verità V in $\mathbf{\Sigma}_i$.

Nel caso 1. dato che $\{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq \mathcal{W}_0$, allora la fbf che cerchiamo è:

$$\psi = ((P_1 \wedge \neg P_1) \vee \cdots \vee (P_n \wedge \neg P_n)).$$

(**Perchè?**)

Nel caso 2., per ogni i tale che $\odot(P_1, \ldots, P_n)$ assume il valore di verità V in $\mathbf{\Sigma}_i$:

(a) scrivi la fbf ψ^i

$$\psi^i \quad = \quad (\overline{P}_{i,1} \wedge \overline{P}_{i,2} \wedge \cdots \wedge \overline{P}_{i,n})$$

in cui $\overline{P}_{i,k} = P_k$ o $\overline{P}_{i,k} = \neg P_k$, per $1 \leq k \leq n$, a secondo che P_k è V o F in $\mathbf{\Sigma}_i$;

(b) la formula ψ che cerchiamo non è altro che la disgiunzione di tutte le ψ^i menzionate in **(a)**:

$$\psi \quad = \quad (\psi^i \vee \psi^j \vee \cdots \vee \psi^l)$$

(**Perchè**?) □

Nota Bene 4.2.8 *Una conseguenza immediata del* ***Teorema di completezza funtoriale*** *è che l'insieme* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *è funtorialmente completo. (****Perchè****?)*

Teorema 4.2.13 (Interpolazione) *Se* $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathcal{W}_0$ *e* ϕ *e* ψ *sono tali che* $\phi \models \psi$ *e che almeno una* P *(lettera che sta per un'asserzione atomica) occorre sia in* ϕ *che in* ψ*, allora esiste una* $\chi \in \mathcal{W}_0$ *di* $\mathcal{L}_0$ *tale che:*

$$\phi \models \chi \;\; e \;\; \chi \models \psi$$

ed ogni lettera P *occorente in* χ *occorre sia in* ϕ *che in* ψ*. (*χ *è noto come l'****interpolante*** *del sequente* $\phi \models \psi$*.)*

Costruisci una tavola di verità elencando tutte e soltanto quelle strutture $\mathbf{\Sigma}$ in cui sono definite soltanto le lettere che occorrono sia in ϕ che in ψ.

Introduci in questa tavola di verità il valore di verità V in corrispondenza di ognuna di queste strutture $\mathbf{\Sigma}$ se $\mathbf{\Sigma}$ ha un'estensione in cui ϕ è vera; e il valore di verità F se $\mathbf{\Sigma}$ ha un'estensione in cui ψ è falsa. (Questo è possibile dal momento che $\phi \models \psi$.) In corrispondenza delle eventuali restanti strutture $\mathbf{\Sigma}$ associa il valore di verità V.

Ora, per mezzo della procedura utilizzata per dimostrare il Teorema di completezza funtoriale, è possibile costruire una formula χ che ha la tavola di verità appena definita. χ è l'interpolante del sequente $\phi \models \psi$. □

Nota Bene 4.2.9 *:*

- *In un certo senso il Teorema di Interpolazione asserisce che se tu hai un argomento valido* $\mathfrak{A}$ *in cui c'è una sola premessa in cui si menziona l'aglio, ma non le cipolle, e una conclusione in cui si menzionano le cipolle, ma non l'aglio, allora* $\mathfrak{A}$ *può essere diviso in due passi e l'asserzione intermedia (l'interpolante) non menziona nè aglio nè cipolle.*

- *Le seguenti sono delle* ***equivalenze notevoli****:*

  1. $\neg\neg A \equiv A$*. Uno degli aspetti importanti di questa equivalenza è che non è accettata dalla* ***logica intuizionista*** *in quanto, per l'intuizionista, in generale non è vero che* $\neg\neg A \models A$*.*
  2. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$*. Prima legge di De Morgan.*
  3. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$*. Seconda legge di De Morgan.*
  4. $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$*. Prima legge distributiva, non accettata dalla* ***logica quantistica****.*
  5. $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$*. Seconda legge distributiva.*

4.3 Esercizi

1. Specificando la vostra interpretazione, formalizzate il seguente argomento in termini di un sequente corretto del calcolo proposizionale rendendo esplicita ogni premessa mancante. Dimostrate che il sequente è corretto:

   > Anche se le cinque condizioni economiche poste da Gordon Brown verranno soddisfatte, la Gran Bretagna non adotterà l'euro; perchè, a meno che non si tenga un referendum che produca un esito positivo, la Gran Bretagna non adotterà l'euro. E sebbene Tony Blair appoggerà pubblicamente l'adozione dell'euro in un tale referendum, la popolazione della Gran Bretagna voterà 'Sì' solo se gli crederanno. Ma, data la crescente sfiducia nei suoi confronti, gli crederanno solo a condizione che anche Gordon Brown lo appoggi pubblicamente. E perchè questo avvenga gli asini dovranno imparare a volare.

2. Mostrate, mediante l'uso di un *tableau*, che il seguente sequente è corretto:

   $$(S \leftrightarrow Q) \models (((S \land \neg R) \to \neg P) \to ((P \to Q) \to (P \to R))).$$

3. Trovate un controesempio del seguente sequente:

   $$((P \to Q) \land (R \to S)) \models ((P \land Q) \to (R \land S)).$$

4. Che significa dire di un insieme di funtori di verità che è 'funtorialmente completo'?

5. Dite brevemente perchè i due seguenti insiemi di funtori di verità non sono funtorialmente completi:

   $$\{\neg\}, \{\land\}.$$

6. Dimostrare che $\{\neg, \land, \lor\}$ è funtorialmente completo.

7. Dedurre da 6. che $\{\neg, \land\}$ e $\{\neg, \lor\}$ sono funtorialmente completi.

8. Sia '$\downarrow$' il funtore di verità binario tale che '$(\phi \downarrow \psi)$' significa 'nè ϕ nè ψ', dedurre che l'insieme $\{\downarrow\}$ è funtorialmente completo.

Chapter 5

Coerenza, completezza e decidibilità

5.1 Introduzione

In questo capitolo svilupperemo un po' la sintassi del calcolo proposizionale per mezzo di una discussione dei concetti di derivabilità e di dimostrabilità di una $\phi \in \mathcal{W}_0$ e tratteremo di tre temi fondamentali: la coerenza, la completezza e la decidibilità del calcolo proposizionale.

Sebbene i concetti di derivabilità e dimostrabilità di una $\phi \in \mathcal{W}_0$ vengano in quanto segue sviluppati indipendentemente da alcun riferimento al concetto di verità di una $\phi \in \mathcal{W}_0$, vedremo, in particolare, che l'insieme dei teoremi del calcolo proposizionale $\mathcal{T}_{\mathrm{CP}}$ coincide con l'insieme delle tautologie $\mathcal{V}_{\mathrm{CP}}$.

5.2 Derivazioni e dimostrazioni

Definizione 5.2.1 ($\mathcal{L}_0$-tableau generato da Γ) *Un $\mathcal{L}_0$-tableau generato da un insieme finito $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$ è un albero ¥ di $\phi \in \mathcal{W}_0$ tale che:*

1. *alcuni dei rami ® di ¥ possono essere chiusi da una linea tracciata sotto la $\phi \in \mathcal{W}_0$ che occorre come ultimo nodo di ®;*

2. *se una ϕ occorre come nodo di un ramo $®_i$, per $i \in \mathbb{N}$, di ¥ allora o $\phi \in \Gamma$ o ϕ è stata ottenuta, per mezzo di una delle regole di derivazione del Calcolo Proposizionale, da un'altra ψ che occorre, come nodo di $®_i$, più in alto rispetto a ϕ;*

3. *un ramo* Ⓡ$_i$ *è chiuso se e solo se contiene, come uno dei suoi nodi, una* ϕ *e, come un altro dei suoi nodi, la* $\neg\phi$*;*

4. *la parte superiore di* ¥ *consiste di un elenco di tutte le* $\phi \in \Gamma$.

Definizione 5.2.2 (Chiusura di un $\mathcal{L}_0$-tableau) *Un $\mathcal{L}_0$-tableau generato da un insieme finito $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$ è* ***chiuso*** *se e solo se tutti i suoi rami* Ⓡ *sono chiusi.*

Definizione 5.2.3 (Incoerenza sintattica di Γ) *:*

- *Se dato un insieme finito $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$ esiste un $\mathcal{L}_0$-tableau chiuso generato da Γ, allora diciamo che Γ è* ***sintatticamente incoerente*** *ed esprimiamo questo scrivendo $\Gamma \vdash$;*

- *quando scriviamo $\Gamma \vdash \phi$ intendiamo $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash$ e diciamo che ϕ* ***è derivabile da*** Γ*; '$\Gamma \vdash \phi$' è chiamato* ***sequente sintattico****;*

- *quando $\Gamma = \emptyset$, $\Gamma \vdash \phi$ diventa $\vdash \phi$ e diciamo che ϕ è* ***dimostrabile*** *o che ϕ è un* ***teorema*** *del Calcolo Proposizionale.*

Nota Bene 5.2.1 *:*

- *È molto importante osservare che, sebbene la nozione di verità non appaia in nessuna delle definizioni* ***5.2.1****,* ***5.2.2*** *e* ***5.2.3****, le nozioni di derivabilità e di dimostrabilità sono disegnate al fine di giustificare asserzioni circa: l'esistenza di relazioni di conseguenza logica tra un insieme finito $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$ e una $\phi \in \mathcal{W}_0$ o circa l'essere vera in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui è definita di una $\phi \in \mathcal{W}_0$.*

- *Ciò che ci permette di distinguere tra una derivazione (dimostrazione) corretta e una sbagliata è l'esistenza o meno di una relazione di conseguenza logica tra la proposizione derivata (dimostrata) e l'insieme di assunzioni da cui è stata derivata (dimostrata).*

- *L'insieme delle regole di derivazione del Calcolo Proposizionale costituisce un* ***sistema formale*** *all'interno del quale è possibile derivare/dimostrare $\phi \in \mathcal{W}_0$.*

Teorema 5.2.1 (Duns Scoto) *Se $\phi \in \mathcal{W}_0$, allora per ogni $\psi \in \mathcal{W}_0$, avremo che:*

$$\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi.$$

Dal momento che, per ogni $\psi \in \mathcal{W}_0$, $\{\phi, \neg\phi\} \cup \{\neg\psi\} \vdash$, abbiamo che $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$. □

Nota Bene 5.2.2 *:*

- *Data una qualsiasi $\phi \in \mathcal{W}_0$, l'insieme $\{\phi, \neg\phi\}$, e ogni insieme finito $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$ tale che $\{\phi, \neg\phi\} \subseteq \Gamma$, sono inutili come possibili basi assiomatiche del Calcolo Proposizionale, perchè lo scopo della base assiomatica di una qualsiasi teoria matematica* ***T*** *è quello di 'catturare'* ***tutte e soltanto*** *le asserzioni vere di* ***T****.*

5.3 Coerenza

Teorema 5.3.1 (Coerenza) *Se un sequente sintattico $\Gamma \vdash \phi$—tale che: (i) $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$, (ii) Γ è un insieme finito e (iii) $\phi \in \mathcal{W}_0$—è corretto allora lo è anche il corrispondente sequente semantico $\Gamma \models \phi$:*

$$(\alpha) \ \textit{se} \ \Gamma \vdash \phi \ \textit{allora} \ \Gamma \models \phi.$$

Dal momento che:

1. $\Gamma \vdash \phi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash$,

2. $\Gamma \models \phi$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \models$;

se poniamo $\Gamma \cup \{\neg\phi\} = \Delta$, la dimostrazione del **Teorema 5.3.1** si riduce alla dimostrazione del seguente risultato:

$$(\beta) \ \text{se} \ \Delta \vdash \ \text{allora} \ \Delta \models .$$

La dimostrazione di (β) consisterà nel far vedere che, se Δ è un insieme semanticamente coerente allora ogni $\mathcal{L}_0$-tableau generato da Δ conterrà almeno un ramo aperto Ⓡ, e cioè:

$$(\gamma) \ \text{se} \ \Delta \not\models \ \text{allora} \ \Delta \not\vdash .$$

Se Δ è semanticamente coerente, esisterà almeno una struttura $\mathbf{\Sigma}$ tale che se $\phi \in \Delta$ allora ϕ è definita e vera in $\mathbf{\Sigma}$.

Ora, qualunque sia la prima regola di derivazione $\mathbf{d}$ applicata ad una $\phi \in \Delta$ per generare un $\mathcal{L}_0$-tableau da Δ, questa sarà o sequenziale o biforcante, quindi:

(a) se $\mathbf{d}$ è biforcante allora delle due ϕ_1 e ϕ_2, ottenute come conseguenza dell'applicazione di $\mathbf{d}$ a ϕ, entrambe saranno definite in $\mathbf{\Sigma}$ e almeno una delle due sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$; mentre,

(b) se **d** è sequenziale allora entrambe le ϕ_1 e ϕ_2, ottenute come conseguenza dell'applicazione di **d** a ϕ, saranno definite e vere in $\mathbf{\Sigma}$.

Sia nel caso **(a)** che nel caso **(b)** seguiamo il percorso discendente del ramo Ⓡ che contiene soltanto fbf definite e vere in $\mathbf{\Sigma}$; e cioè:

(c) se abbiamo applicato una **d** biforcante ad una $\phi \in \Delta$, allora 'scendiamo lungo il ramo Ⓡ' che contiene tutte le formule di Δ e quella formula, tra ϕ_1 e ϕ_2, che è vera in $\mathbf{\Sigma}$;

(d) se abbiamo, invece, applicato alla $\phi \in \Delta$ una **d** sequenziale, allora 'scendiamo lungo il ramo Ⓡ' che contiene, come suoi nodi, tutte le formule di Δ ed entrambe ϕ_1 e ϕ_2.

Quando il ramo Ⓡ, che avremo così percorso in senso discendente, terminerà, avremo individuato un ramo Ⓡ del nostro albero ($\mathcal{L}_0$-tableau generato da Δ) che contiene ai suoi nodi soltanto formule ϕ che sono definite e vere in $\mathbf{\Sigma}$. Questo implica che esiste almeno un ramo aperto nell'$\mathcal{L}_0$-tableau generato da Δ (**Perchè?**) e che, quindi, Δ è coerente sintatticamente, e cioè $\Delta \nvdash$. □

Nota Bene 5.3.1 :

- *Se $\Gamma \vdash \phi$ è una derivazione corretta allora questa non è altro che una procedura di decisione relativa all'esistenza di una relazione di conseguenza logica tra Γ e ϕ e cioè $\Gamma \models \phi$.*

- *Se poniamo $\Gamma = \emptyset$, allora il **Teorema 5.3.1** mostra che i teoremi del Calcolo Proposizionale (gli elementi dell'insieme $\mathcal{T}_{CP}$) sono delle tautologie (gli elementi dell'insieme $\mathcal{V}_{CP}$), e cioè che:*

$$\mathcal{T}_{CP} \subseteq \mathcal{V}_{CP}.$$

  *Questo è un risultato molto importante, perchè significa che il Calcolo Proposizionale 'cattura' **soltanto** $\phi \in \mathcal{W}_0$ che sono vere in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui sono definite e cioè soltanto verità logiche.*

- *Il **Teorema 5.3.1** implica che non esiste una $\phi \in \mathcal{W}_0$ tale che $\vdash \phi$ e $\vdash \neg\phi$, perchè se ϕ è un teorema del Calcolo Proposizionale allora, per il **Teorema 5.3.1**, ϕ deve essere una tautologia. Ma se ϕ è una tautologia allora $\neg\phi$ è una fbf che è sempre falsa in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui è definita e, quindi, $\neg\phi$ non può essere una tautologia. Ma se $\neg\phi$ non è una tautologia allora, sempre per il **Teorema 5.3.1**, $\neg\phi$ non è un teorema del Calcolo Proposizionale. (Lo stesso ragionamento è applicabile nel caso in cui $\vdash \neg\phi$ per dimostrare che $\nvdash \phi$.)*

5.4 Completezza

Teorema 5.4.1 (Completezza) *Se un sequente semantico* $\Gamma \models \phi$*—tale che: (i)* $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$*, (ii)* Γ *è un insieme finito e (iii)* $\phi \in \mathcal{W}_0$*—è corretto allora lo è anche il corrispondente sequente sintattico* $\Gamma \vdash \phi$*:*

$$(\alpha) \;\; \textit{se} \;\; \Gamma \models \phi \;\; \textit{allora} \;\; \Gamma \vdash \phi.$$

Per le considerazioni fatte all'inizio della dimostrazione del **Teorema 5.3.1**, possiamo ridurre la dimostrazione del **Teorema 5.4.1** alla dimostrazione della seguente asserzione:

$$(\beta) \;\; \text{se} \;\; \Delta \models \;\; \text{allora} \;\; \Delta \vdash,$$

dove $\Delta = \Gamma \cup \{\neg\phi\}$.

Dimostreremo (β) facendo vedere che:

$$(\gamma) \;\; \text{se} \;\; \Delta \nvdash \;\; \text{allora} \;\; \Delta \not\models$$

.

Construiamo un $\mathcal{L}_0$-tableau completo ¥ generato da Δ. Se $\Delta \nvdash$, allora ¥ non è chiuso ed esisterà, quindi, almeno un ramo aperto $®_a$ di ¥.

Assegniamo a tutte e soltanto le lettere $S, P, Q, R, \ldots$ (che stanno per asserzioni atomiche) che compaiono come nodi di $®_a$ il valore di verità V. La struttura $\mathbf{\Sigma}$ così definita è tale che tutte le fbf ϕ che compaiono come nodi di $®_a$ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$ e, quindi, in particolare, anche ogni $\phi \in \Delta$ è vera in $\mathbf{\Sigma}$.

Per vedere che le cose stanno proprio così, scendiamo lungo $®_a$ fino a raggiungere il suo nodo più basso. (**Perchè questo nodo deve esistere?**)

Una volta giunti a questo nodo troveremo:

(a) una lettera P che sta per un'asserzione atomica; o

(b) la negazione $\neg P$ di una lettera P che sta per una asserzione atomica. (**Perchè?**)

Nel caso **(a)** P sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$ (data la nostra definizione di $\mathbf{\Sigma}$). Nel caso **(b)** $\neg P$ sarà vera in $\mathbf{\Sigma}$, perchè: (i) $\neg P$ è un nodo di $®_a$ e (ii) $®_a$ è un ramo aperto di ¥.

Ora, data la natura delle regole di derivazione del Calcolo Poposizionale, se P (o $\neg P$) è vera in $\mathbf{\Sigma}$ e occupa l'n-esimo nodo di $®_a$, allora anche la fbf ψ che occupa l'$(n-1)$-esimo nodo di $®_a$ lo sarà. (**Perchè?**)

'Risalendo' in questo modo il ramo aperto $®_a$ di ¥, siamo in grado di dimostrare che, in particolare, tutte le $\phi \in \Delta$ sono vere in $\mathbf{\Sigma}$. Da ciò segue che $\Delta \not\models$. □

Nota Bene 5.4.1 *:*

- *Il **Teorema 5.4.1** ci rassicura circa il fatto che siamo in grado di derivare tutte le conseguenze logiche di un insieme finito Γ di parole proprie di $\mathcal{L}_0$.*

- *Se poniamo $\Gamma = \emptyset$, allora il **Teorema 5.4.1** ci fornisce, inoltre, un'altra rassicurazione, ripetto a quella che ci era stata data dal **Teorema 5.3.1**, perchè ci mostra che il Calcolo Proposizionale 'cattura' **tutte** quelle $\phi \in \mathcal{W}_0$ che sono vere in ogni struttura $\mathbf{\Sigma}$ in cui sono definite, e cioè che:*
$$\mathcal{V}_{CP} \subseteq \mathcal{T}_{CP}.$$

Teorema 5.4.2 (Armonia) *Se (i) $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$, (ii) Γ è un insieme finito e (iii) $\phi \in \mathcal{W}_0$, allora*
$$\Gamma \models \phi \ \textit{ se e solo se } \ \Gamma \vdash \phi.$$

Segue immediatamente dai **Teoremi 5.3.1** e **5.4.1**. □

Corollario 5.4.1 (Adeguatezza) *L'insieme dei teoremi del Calcolo Proposizionale, $\mathcal{T}_{CP}$, coincide con l'insieme delle tautologie, $\mathcal{V}_{CP}$, e cioè:*
$$\mathcal{T}_{CP} = \mathcal{V}_{CP}.$$

Poni $\Gamma = \emptyset$ nel **Teorema 5.4.2**. □

Nota Bene 5.4.2 *:*

- *È importante notare che il **Corollario 5.4.1** ci fa vedere che il Calcolo Proposizionale è **adeguato** e cioè che **tutte e soltanto** le tautologie sono teoremi del Calcolo Proposizionale.*

- *Il **Teorema di Armonia** ci consente di ottenere dai meta-teoremi semantici di **Espansione**, **Proiezione**, **Taglio**, **Transitività** di $\models$, ecc. i corrispondenti meta-teoremi sintattici.*

Adesso faremo vedere che se é possibile derivare una parola propria ϕ di $\mathcal{L}_0$ e la sua negazione $\neg\phi$ da un insieme finito Γ di parole proprie di $\mathcal{L}_0$ allora qualsiasi parola propria ψ di $\mathcal{L}_0$ è derivabile da Γ. Questo risultato equivale ad una 'trivializzazione' di Γ.

La rilevanza matematica di questo risultato diventa ovvia se pensiamo a Γ come ad una possibile base assiomatica del Calcolo Proposizionale. (Questo risultato può essere facilmente generalizzato ad una qualsiasi teoria matematica T che usi la logica classica.)

Teorema 5.4.3 *Sia* Γ *un insieme finito di parole proprie di* $\mathcal{L}_0$ *e* ϕ *una parola propria di* $\mathcal{L}_0$ *tale che* $\Gamma \vdash \phi$ *e* $\Gamma \vdash \neg\phi$*, allora se* ψ *è una parola propria di* $\mathcal{L}_0$ *abbiamo che* $\Gamma \vdash \psi$.

Dal Teorema di Duns Scoto abbiamo che $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$, per ogni $\psi \in \mathcal{W}_0$. Se Γ è un insieme finito di parole proprie di $\mathcal{L}_0$, applicando l'equivalente sintattico del Teorema di Espansione a $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$ otterremo che $\Gamma \cup \{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$. Se, inoltre, (1) $\Gamma \vdash \phi$ e (2) $\Gamma \vdash \neg\phi$, poniamo $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\phi\}$, allora avremo che, per (2), (α) $\Gamma^* \vdash \neg\phi$ (**perchè?**) e (β) $\Gamma^* \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi$.

Ora, applicando l'equivalente sintattico del Teorema del Taglio ad (α) e (β), avremo che $\Gamma^* \vdash \psi$; avremo, cioè (γ) $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, per ogni $\psi \in \mathcal{W}_0$. Ma da (1) sappiamo che (δ) $\Gamma \vdash \phi$. A questo punto, applicando di nuovo l'equivalente sintattico del Teorema del Taglio, questa volta a (γ) e a (δ), abbiamo che $\Gamma \vdash \psi$, per ogni $\psi \in \mathcal{W}_0$. $\square$

Nota Bene 5.4.3 *:*

- *Esistono delle logiche non classiche—le* ***logiche para-consistenti****—che non vengono trivializzate dalla dimostrazione di una parola propria* ϕ *e della sua negazione* $\neg\phi$*. Chiaramente, in tali logiche non è possibile dimostrare il* ***Teorema 5.4.3.***

5.5 Decidibilità

Definizione 5.5.1 (Decidibilità di un insieme $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$) *Se* $\Gamma \subseteq \mathcal{W}_0$*, diciamo che* Γ *è* ***decidibile*** *se e solo se esiste un algoritmo* Π *tale che, per ogni* $\phi \in \mathcal{W}_0$*,* Π *determina, in un numero finito di passi, se* $\phi \in \Gamma$ *o se* $\phi \notin \Gamma$.

Teorema 5.5.1 *L'insieme* $\mathcal{V}_{CP}$ *è decidibile.*

Se $\phi \in \mathcal{W}_0$, identifica l'$\mathcal{L}_0$-*tableau* generato da $\Delta = \{\neg\phi\}$. Se il *tableau* è chiuso allora $\phi \in \mathcal{V}_{CP}$, se il *tableau* è aperto allora $\phi \notin \mathcal{V}_{CP}$. (Un altro algoritmo di questo genere può essere escogitato mediante l'uso delle tavole di verità.) $\square$

Nota Bene 5.5.1 *:*

- *Il fatto che* $\mathcal{V}_{CP}$ *sia decidibile implica che il problema 'La formula* ϕ *è una tautologia?', dove* $\phi \in \mathcal{W}_0$*, può essere risolto,* ***in linea di principio****, per mezzo di una procedura puramente meccanica che ha luogo in un numero finito di passi.*

- *Se, da un canto, con la dimostrazione della decidibilità di $\mathcal{V}_{CP}$, il problema del trovare delle dimostrazioni di verità logiche (tautologie) appartenenti al Calcolo Proposizionale non riveste più alcun interesse matematico, si aprono, d'altro canto, questioni matematicamente interessanti riguardanti l'esistenza o meno di* ***risorse*** *atte ad implementare gli algoritmi di decisione scoperti. Tali questioni gravitano attorno al problema relativo alla* ***complessità computazionale****.*

5.6 Esercizi

1. Formalizzate il seguente argomento in un sequente semantico corretto del Calcolo Proposizionale, notando ogni difficoltà e problema interessante. Dimostrate la correttezza del sequente semantico ottenuto utilizzando il metodo dei *tableaux*.

   > Gryffindor perderà la Coppa di Quidditch solo se saranno battuti nella partita con Hufflepuff; ma vinceranno sicuramente, anche se il loro capitano è infortunato. La professoressa McGonagall è contrariata soltanto se Gryffindor perde il Campionato delle Quattro Case di Hogwarts, altrimenti non lo è mai. Dal momento che vincere la Coppa di Quidditch è sufficiente a garantir loro il Campionato, ne segue che Minerva McGonagall non sarà contrariata.

2. Enunciate il **Teorema d'Interpolazione** del Calcolo Proposizionale e date un metodo per trovare l'interpolante di un dato sequente semantico. Se la vostra formulazione del teorema fa riferimento a sequenti semantici che hanno una sola fbf di $\mathcal{L}_0$ a sinistra della porta semantica, mostrate come questa può essere cambiata per tener conto di sequenti semantici che hanno più di una fbf di $\mathcal{L}_0$ a sinistra della porta semantica.

3. Trovate degli interpolanti per i seguenti sequenti semantici:

   (i) $P \models P$.

   (ii) $\{(P \to Q), (Q \to R)\} \models (P \to R)$.

   (iii) $\{(P \to Q), (Q \to \neg P)\} \models (P \to R)$.

   (iv) $\{((P \to Q) \vee (P \to R)), ((Q \vee R) \to S)\} \models \neg(T \wedge (P \wedge \neg S))$.

   (v) $\{(P \leftrightarrow \neg Q), (Q \leftrightarrow (\neg R \vee S)), R\} \models (((P \vee S) \vee T) \wedge (P \to (S \to T)))$.

(vi) $\{(R \wedge \neg S), (P \to (R \to S)), (\neg S \to P), \neg Q\} \models (Q \vee \neg T)$.

4. Generate un sequente semantico **(vii)** sostituendo in **(vi)** $\neg P$ al posto di $\neg Q$ (l'ultima formula che compare a sinistra della porta semantica immediatamente prima di questa).

   Dite, giustificando la vostra risposta, se l'interpolante che avete trovato per il sequente semantico **(vi)** è anche un interpolante per il nuovo sequente semantico **(vii)**.

Chapter 6

Il Calcolo dei Predicati I

6.1 Introduzione

Ci sono molti argomenti formulati in italiano la cui validità non può essere dimostrata mediante formalizzazioni ottenute all'interno di $\mathcal{L}_0$, il linguaggio del Calcolo Proposizionale. Un esempio di questo fenomeno è dato dall'argomento menzionato nell'Introduzione della prima lezione:

Esempio 6.1.1 *Se assumiamo che tutti gli uomini sono mortali e che Socrate è un uomo ne segue che Socrate è mortale.*

Infatti, data la seguente interpretazione **I**:

I			
	P	$\mapsto$	Tutti gli uomini sono mortali
	Q	$\mapsto$	Socrate è un uomo
	R	$\mapsto$	Socrate è mortale

otteniamo il sequente semantico:

$$\{P, Q\} \models R$$

il cui insieme controesempio:

$$\{P, Q, \neg R\}$$

genera un *tableau* aperto.

Un altro tipo di argomento la cui validità non può essere dimostrata mediante formalizzazioni ottenute in $\mathcal{L}_0$ è il seguente:

Esempio 6.1.2 *Se assumiamo che Caino ha ucciso Abele e che Caino è il primogenito di Adamo ed Eva ne segue che il primogenito di Adamo ed Eva ha ucciso Abele.*

Il problema alla base di questo tipo di limiti presenti nel Calcolo Proposizionale è rappresentato dal fatto che le formalizzazioni di argomenti che possiamo produrre all'interno del Calcolo Proposizionale non tengono conto della struttura interna delle proposizioni atomiche.

Vedremo nella parte restante del corso che questi limiti verranno superati per mezzo di formalizzazioni ottenute nel linguaggio $\mathcal{L}_1$ del Calcolo dei Predicati, ma che il passaggio dal Calcolo Proposizionale a quello dei Predicati avrà anche un certo 'costo'.

In questa lezione studieremo, in particolare, alcune componenti della struttura interna delle asserzioni atomiche, componenti e struttura che sono alla radice della validità di un'ampia classe di argomenti. Tali componenti sono **predicati** come: x è più pesante di y; espressioni note come **quantificatori** quali: Tutte le x tali che ..., Esiste almeno un x tale che ...; e **designatori** quali 'Socrate', 'Caino', 'Abele', 'Il vincitore della battaglia di Alesia'.

6.2 Designatori e predicati

Definizione 6.2.1 (Designatori) *Si chiamano **designatori** tutte quelle espressioni usate per fare riferimento a degli elementi di un dominio.*

In quanto segue considereremo soltanto due tipi di designatori: nomi propri e descrizioni definite.

Definizione 6.2.2 (Nomi propri) *I **nomi propri** sono dei nomi che, per apposita convenzione, vengono utilizzati per denotare persone o cose.*

Esempio 6.2.1 *Genoveffa, Palermo, Alfa Centauri.*

Definizione 6.2.3 (Descrizioni definite) *Si chiamano **descrizioni definite** tutte quelle espressioni singolari utilizzate come nomi e che iniziano con: il, lo, la.*

Esempio 6.2.2 *Il padre di Caino, la città natale di Scipione l'Africano, l'autore della Divina Commedia.*

Nota Bene 6.2.1 *Un designatore deve fare riferimento soltanto ad un'unica cosa (o persona).*

Definizione 6.2.4 (Predicato) *Si chiama* ***predicato*** *quella stringa finita di parole della lingua italiana e* ***variabili individuali*** *tale che, se tutte le variabili individuali presenti nella stringa vengono rimpiazzate da appositi designatori, la stringa si trasforma in un'asserzione avente i designatori utilizzati nella sostituzione come costituenti.*

Esempio 6.2.3 *:*

(a) x *è la trisnonna di Zorro*

(b) x *è più alto di* y

(c) x *è tra* y *e* z

Definizione 6.2.5 (variabili libere) *Sia* P *un predicato (una* ***variabile predicativa****) e* x *una variabile individuale che occorre in* P. *Diciamo che* x *è* ***libera*** *in* P *se e solo se è necessario sostituire un designatore* d *al posto di* x *in* P *per trasformare* P *in una asserzione.*

Esempio 6.2.4 x *è minore di* y.

Nota Bene 6.2.2 *:*

- *I predicati si possono classificare in relazione al numero di variabili libere distinte l'una dall'altra che occorrono nella stringa.*
- *Le asserzioni possono essere considerate come dei predicati a* 0*-posti.*

Definizione 6.2.6 (Identità) *Il predicato* x *è uguale a* y *è chiamato* ***identità****.*

Legge 6.2.1 (I dell'identità) *Per ogni elemento* a *del dominio,* $a = a$.

Regola di derivazione 6.2.1 (identità) *Se* d *è un designatore, allora ogni insieme di asserzioni contenente l'asserzione* $\neg(d = d)$ *è incoerente.*

Legge 6.2.2 (II identità) *Se* $a = b$, *allora qualunque predicato sia vero di* a *sarà anche vero di* b *(e* vice versa*).*

Regola di derivazione 6.2.2 (Regola di Leibniz) *Siano* d *ed* e *dei designatori e* ϕ *un'asserzione, se* ψ *è stata ottenuta da* ϕ *rimpiazzando una o più occorrenze di* d *in* ϕ *per mezzo di* e, *allora entrambi i seguenti argomenti sono validi :*

1. $\phi, d = e$ *Quindi,* ψ
2. $\phi, e = d$ *Quindi,* ψ

6.3 Soddisfacibilità

Consideriamo il predicato ad un posto: x è biondo. Se gli elementi del dominio $\mathcal{D}$ del nostro discorso sono esseri umani allora diremo che il predicato 'x è biondo' è **soddisfatto** soltanto da quegli esseri umani biondi che appartengono a $\mathcal{D}$.

La nozione di soddisfacibilità di un predicato può essere generalizzata a predicati ad n posti, per $n \in \mathbb{N}$ e $1 < n$. Ma prima di fare questo c'è bisogno di definire un nuovo concetto, quello di coppia ordinata.

Definizione 6.3.1 (Coppia ordinata) *Se $a, b \in \mathcal{D}$, diciamo che $< a, b >$ è una **coppia ordinata** se e solo se*

$$< a, b > = < c, d > \textit{ solo nel caso in cui } a = c \textit{ e } b = d.$$

Quindi, in particolare, se $a \neq b$ allora $< a, b > \neq < b, a >$.

Consideriamo il predicato a due posti $(*)$ x è più alto di y, diremo che la coppia ordinata $< a, b >$, dove $a, b \in \mathcal{D}$ soddisfa $(*)$ se e solo se a è più alto di b.

Chiameremo l'insieme di tutte le coppie ordinate di elementi di $\mathcal{D}$ che soddisfano $(*)$: **relazione binaria**.

Nota Bene 6.3.1 *:*

- *La definizione di coppia ordinata può essere facilmente modificata al fine di definire una n-pla ordinata di elementi di $\mathcal{D}$, per un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 < n$. (Come?)*

- *I concetti di soddisfacibilità di un predicato a due posti e di relazione binaria possono, a loro volta, essere generalizzati per ottenere quelli di soddisfacibilità di un predicato ad n posti e di relazione n-aria, per $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 < n$. (Come?)*

Ci sono due modi per descrivere una relazione n-aria definita su un certo dominio $\mathcal{D}$:

1. elencare le n-ple ordinate che le appartengono;

2. produrre il predicato ad n posti che è soddisfatto da tutte e soltanto le n-ple appartenenti alla relazione n-aria in oggetto.

Nota Bene 6.3.2 *Il vantaggio del secondo modo di descrivere una relazione n-aria rispetto al primo è che certe relazioni ad n posti possono contenere un numero infinito di n-ple.*

Definizione 6.3.2 (Soddisfacibilità di un predicato ad n posti) *Sia P^n un predicato ad n posti in cui le variabili $x_1, \ldots, x_n$ occorono libere. Se $o_1, \ldots, o_n$ sono elementi del dominio $\mathcal{D}$, si dice che la n-pla ordinata $< o_1, \ldots, o_n >$* ***soddisfa*** *P^n in $\mathcal{D}$ se è possibile trasformare P^n in un'asserzione vera in $\mathcal{D}$ sostituendo in P^n d_i al posto di x_i, per $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$, dove d_i è un designatore il cui riferimento in $\mathcal{D}$ è o_i.*

Esempio 6.3.1 *Nell'esempio* ***6.2.4****, se $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, il predicato 'x è minore di y' è soddisfatto da un numero infinito di coppie ordinate: $< 0, 1 >, < 0, 2 >, \ldots, < 1, 2 >, < 1, 3 >, \ldots$.*

6.4 Relazioni binarie

Le relazioni binarie rappresentano il caso più semplice di relazioni. Esiste un metodo molto semplice per rappresentare relazioni binarie per mezzo di diagrammi. Se $\Re^2$ è una relazione binaria definita su un dominio $\mathcal{D}$, possiamo rappresentare $\mathcal{D}$ come una curva chiusa e gli elementi di $\mathcal{D}$ come punti presenti nell'area racchiusa dalla curva.

Data una qualsiasi coppia ordinata $< a, b > \in \Re^2$, noi possiamo tracciare una freccia da a a b. Se c'è una freccia che va da a a b ed una freccia che va da b ad a, possiamo tracciare, invece di queste, una doppia freccia tra a e b.

Se $\Re^2$ contiene coppie ordinate in cui il primo elemento è uguale al secondo, per es. $< a, a >$, tracceremo una doppia freccia da a ad a. Il diagramma completo così ottenuto si chiama il **grafico** di $\Re^2$.

Esempio 6.4.1 *$\mathcal{D} = \{A, \neg A, (A \wedge \neg A), (A \vee \neg A)\}$ e $\Re^2 = \{< a, b >|\ a, b \in \mathcal{D}$ e $a \models b\}$.*

6.5 Quantificatori

Quantificare su di un predicato ad n-posti P^n equivale ad alterarlo così da formare o un'asserzione (se $n = 1$) o un predicato con un numero inferiore di variabili libere rispetto a P^n (se $1 < n$). Lo scopo del quantificare su di un predicato consiste nel dire quanti elementi del dominio $\mathcal{D}$ soddisfano (o non soddisfano) il predicato.

Nota Bene 6.5.1 *Per comprendere un'asserzione quantificata di solito abbiamo bisogno di determinare il dominio di quantificazione $\mathcal{D}$.*

I metodi principali di quantificazione sono tre:

1. **instanziazione**: rimpiazzamento di una variabile libera in un predicato per mezzo di un designatore;
2. **quantificazione universale**;
3. **quantificazione esistenziale**.

Esempio 6.5.1 (Instanziazione) *:*

1. $\mathcal{D} = \{x \mid x$ *è un essere umano*$\}$;
2. x *è calvo;*
3. *Giovanni è calvo.*

Esempio 6.5.2 (Quantificazione universale) *:*

1. $\mathcal{D} = \{x \mid x$ *è un essere umano*$\}$;
2. x *è calvo;*
3. *Tutti gli esseri umani sono calvi.*
4. $\forall x(x$ *è calvo*$)$.

Esempio 6.5.3 (Quantificazione esistenziale) *:*

1. $\mathcal{D} = \{x \mid x$ *è un essere umano*$\}$;
2. x *è calvo;*
3. *Esiste almeno un essere umano calvo.*
4. $\exists x(x$ *è calvo*$)$.

Nota Bene 6.5.2 *:*

- *Considerate le seguenti equivalenze notevoli:*
  $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$,
  $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$.
- *Il Calcolo dei Predicati studiato in queste dispense è del* ***primo ordine*** *con identità in quanto le uniche variabili quantificate sono le variabili individuali e si utilizza il predicato binario '='. Se si quantificassero anche le* ***variabili predicative*** *interpretate su un dominio di individui avremmo un calcolo dei predicati del* ***secondo ordine*** *(con identità), ecc. ecc.*

6.6 Esercizi

Date le seguenti proprietà di una relazione binaria:

riflessiva se ogni punto del grafico della relazione è collegato a se stesso da una freccia (*loop*) ;

irriflessiva se nessun punto del grafico è collegato a se stesso da un *loop*;

non riflessiva se la relazione non è nè riflessiva nè irriflessiva;

simmetrica se tutte le frecce del grafico sono doppie;

asimmetrica se nessuna freccia del grafico è doppia;

anti simmetrica se le uniche frecce doppie del grafico sono dei *loops*;

non simmetrica se la relazione non è nè simmetrica nè asimmetrica;

transitiva se il grafico non contiene due frecce consecutive (che vanno nella stessa direzione) senza che vi sia una scorciatoia (che va nella stessa direzione delle due frecce consecutive);

intransitiva se il grafico non contiene due frecce consecutive (che vanno nella stessa direzione) per le quali esista una scorciatoia (che va nella stessa direzione delle due frecce consecutive);

non transitiva se la relazione non è nè transitiva nè intransitiva;

connessa se tra due qualsiasi punti del grafico della relazione esiste almeno una freccia;

equivalenza se la relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva;

dite se le seguenti relazioni binarie definite sul dominio menzionato sono: riflessive, irriflessive, non riflessive, simmetriche, asimmetriche, non simmetriche, transitive, intransitive, non transitive, connesse, non connesse:

1. x è maggiore di y, Dominio: i numeri naturali;

2. x è un genitore di y, Dominio: tutti gli esseri umani vivi o morti;

3. x è la sorella o la cognata di y, Dominio: tutti gli esseri umani viventi;

4. x oggi è più alto di quanto lo fosse y un anno fa, Dominio: tutti gli esseri umani viventi;

5. x gioca nella stessa squadra di y, Dominio: giocatori di calcio;
6. x è la radice quadrata di y, Dominio: i numeri naturali;
7. x è minore od uguale a y, Dominio: i numeri naturali.

Chapter 7

Il Calcolo dei Predicati II

7.1 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo di: (1) tradurre asserzioni (formulate in italiano) in $\mathcal{L}_1$, il linguaggio del Calcolo dei Predicati; (2) applicare la tecnica dei *tableaux* ad insiemi di parole proprie di $\mathcal{L}_1$; (3) discutere di pregi e difetti del Calcolo dei Predicati.

7.2 Sul raggio d'azione dei quantificatori

Come nel caso delle traduzioni dall'italiano in $\mathcal{L}_0$, così, anche quando si tratta di tradurre asserzioni appartenenti alla lingua italiana in $\mathcal{L}_1$, dobbiamo, innanzitutto, individuare l'operatore logico occorrente nell'asserzione che ha il raggio d'azione più ampio (degli altri) e, siccome, noi adesso abbiamo a che fare con asserzioni che contengono dei quantificatori, dobbiamo, quindi, determinare se l'asserzione in oggetto è di tipo $\forall$ o di tipo $\exists$.

Definizione 7.2.1 *Un'asserzione A è di tipo $\forall$ (o di tipo $\exists$) se e solo se il quantificatore che occorre in A e possiede il raggio d'azione più ampio è $\forall$ (o $\exists$).*

Esempio 7.2.1 *:*

(1) *<u>Ogni</u> numero ha <u>un</u> successore*

(1)′ $\forall x\,\underline{(\textit{x è un numero} \to \exists y\,\underline{(\textit{y è un numero} \land \textit{y è il successore di x})})}$

(2) *A Ficarazzi c'è <u>qualcuno</u> che sa <u>tutto</u> sulle balene ubriache*

(2)′ $\exists x\,\underline{(\textit{x è a Ficarazzi} \land \forall y\,\underline{(\textit{y riguarda le balene ubriache} \to \textit{x sa y})})}$

(3) *C'è uno scheletro in ogni armadio*

(3)′ $\forall x\,(x \text{ è un armadio} \to \exists y\,(y \text{ è uno scheletro} \land y \text{ è in } x))$

(3)″ $\exists x\,(x \text{ è uno scheletro} \land \forall y\,(y \text{ è un armadio} \to x \text{ è in } y))$

(3)″ *è errata, perchè?*

Nota Bene 7.2.1 *:*

- *L'analisi di asserzioni complesse nel Calcolo dei Predicati ha luogo come nel Calcolo Proposizionale e cioè: (1) bisogna, innanzitutto, determinare la forma logica dell'asserzione complessa; (2) si deve, quindi, determinare la forma logica delle asserzioni più semplici muovendo da asserzioni più complesse.*

- *Quando nella stessa asserzione vi sono due o più quantificatori dobbiamo stare attenti alla scelta che facciamo per quanto riguarda le variabili individuali.*

- *In logica classica asserire* $\forall x P(x)$ *è equivalente ad asserire* $P(A_1) \land P(A_2) \land \cdots$*; mentre asserire* $\exists x P(x)$ *è equivalente ad asserire* $P(A_1) \lor P(A_2) \lor \cdots$ *, dove* A_i*, per* $1 \leq i \in \mathbb{N}$*, è un designatore. Questo fatto ha spinto alcuni autori ad usare il simbolo '*$\bigwedge$*' al posto di '*$\forall$*' e il simbolo '*$\bigvee$*' al posto di '*$\exists$*'. Uno dei vantaggi importanti della notazione* $\forall x P(x)$ *e* $\exists x P(x)$ *è che, nel caso in cui il dominio* $\mathcal{D}$ *è infinito, ci consente di utilizzare una formula che contiene un numero finito di componenti invece di una formula con un numero infinito di componenti.*

7.3 Interpretazioni e *tableaux*

Le interpretazioni di parole proprie sull'alfabeto di $\mathcal{L}_1$ debbono innanzitutto specificare il dominio di quantificazione $\mathcal{D}$ e debbono, quindi, occuparsi di designatori e predicati. In quanto segue assumeremo sempre che $\mathcal{D} \neq \emptyset$.

Esempio 7.3.1 (Frasi da tradurre in $\mathcal{L}_1$) *:*

1. *Quelli che hanno successo sono felici*
2. *Anna disprezza la gente di successo che lavora più di lei*

INTERPRETAZIONE

Dominio: $\mathcal{D} = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$.

Fx: x è felice.

Sx: x ha successo.

LPxy: x lavora più di y.

Dxy: x disprezza y.

a: Anna.

TRADUZIONE: 1. $\forall x(Sx \to Fx)$; 2. $\forall x((LPxa \wedge Sx) \to Dax)$.

In merito all'uso fatto dei *tableaux* all'interno del Calcolo dei Predicati al fine di determinare la coerenza di un insieme di parole proprie Γ sull'alfabeto di $\mathcal{L}_1$, c'è da dire che mentre l'ottenere un *tableau* chiuso da Γ mostra che Γ è incoerente, l'ottenere un *tableau* aperto da Γ di solito non dimostra nulla.

Infatti, secondo il Teorema di Church, se ϕ è una parola propria sull'alfabeto di $\mathcal{L}_1$ e ϕ non è valida—cioè ϕ non è vera in ogni Σ_1-struttura—non esiste un algoritmo in grado di farci vedere che ϕ non è valida. Questo fatto mette in evidenza una profonda differenza esistente tra il Calcolo Proposizionale ed il Calcolo dei Predicati: mentre nel Calcolo Proposizionale l'insieme delle tautologie è decidibile, nel Calcolo dei Predicati l'insieme delle parole proprie valide non lo è.

7.4 Le regole dei *tableaux* del Calcolo dei Predicati

L'insieme di regole da utilizzare nel Calcolo dei Predicati per generare un *tableau* da un insieme di parole proprie Γ sull'alfabeto di $\mathcal{L}_1$ comprende le regole utilizzate nel Calcolo Proposizionale ed in più le seguenti sette regole:

7.4.1 Regola di Leibniz 1

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ D & = & E \\ & \downarrow & \\ & \psi & \end{array}$$

7.4.2 Regola di Leibniz 2

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ E & = & D \\ & \downarrow & \\ & \psi & \end{array}$$

Nelle regole di Leibniz **7.4.1** e **7.4.2** Il designatore D (o E) occorre in ϕ, e ψ è ciò che otteniamo rimpiazzando una o più occorrenze di D (o E) in ϕ per mezzo di E (o D). Da ciò segue che aggiungere ψ all'insieme $\{\phi, D = E\}$ (o all'insieme $\{\phi, E = D\}$) non ne compromette la coerenza.

7.4.3 Regola $\forall x\, \phi$ 1

$$\begin{array}{c} \forall x\, \phi \\ \downarrow \\ \psi \end{array}$$

C'è un designatore D che è già apparso nel ramo a cui viene aggiunta la ψ, e ψ è ciò che otteniamo da ϕ quando sostituiamo in essa il designatore D al posto di ciascuna *occorenza libera* della variabile x (in ϕ).

Nota Bene 7.4.1 *:*

- *Sebbene, come indicato dalla regola* ***7.4.4****, noi possiamo estendere ogni ramo aperto del* tableau *che contiene* $\forall x\phi$ *come suo nodo prolungando un tale ramo scrivendo* $\phi(D)$*, per qualunque designatore* D*, il motivo per cui noi scegliamo, se possibile, un designatore* D *che è già apparso nel ramo a cui viene aggiunta la* ψ *(dove* $\psi = \phi(D)$*) è che vogliamo chiudere il* tableau*, sempre che questo sia possibile, nel più breve numero di passi.*

7.4.4 Regola $\forall x\, \phi$ 2

$$\begin{array}{c} \forall x\, \phi \\ \downarrow \\ \psi \end{array}$$

Applicabile nel caso in cui: nessun designatore D è apparso nelle parole proprie presenti nel ramo a cui viene aggiunta la ψ, D è un nome proprio e ψ è ciò che otteniamo da ϕ quando sostituiamo in essa D al posto di ciascuna *occorenza libera* della variabile x (in ϕ).

Nota Bene 7.4.2 *:*

- *L'effetto di questa regola consiste nel bandire il dominio vuoto in quanto implica l'esistenza di almeno un individuo appartenente a $\mathcal{D}$ e precisamente quello a cui fa riferimento il designatore D.*

- *Se $\mathcal{D}$ è infinito la regola* ***7.4.4*** *implica che possiamo generare da $\forall x\phi$ un ramo infinitamente lungo, ciò implica che, contrariamente a quanto accade nel Calcolo Proposizionale:*

  1. *un* tableau *del Calcolo dei Predicati del primo ordine con identità può non terminare; e che di conseguenza*
  2. *se l'insieme controesempio di un sequente semantico $\Gamma \models \phi$ è coerente potremmo non saperlo mai.*

7.4.5 Regola $\exists x\,\phi$

$$\begin{array}{c} \exists x\,\phi \\ \downarrow \\ \psi \end{array}$$

Il designatore D *non* è già apparso nel ramo a cui viene aggiunta la ψ, e ψ è ciò che otteniamo da ϕ quando sostituiamo in essa il designatore D al posto di ciascuna *occorenza libera* della variabile x (in ϕ).

Nota Bene 7.4.3 *:*

- *La giustificazione di questa regola consiste nel fatto che la formula $\exists x\phi$ asserisce semplicemente che esiste almeno un elemento del dominio $\mathcal{D}$ che soddisfa ϕ. Ma niente ci garantisce che questo elemento debba essere proprio quell'elemento di $\mathcal{D}$ a cui facciamo riferimento mediante il designatore D che è già apparso nel ramo a cui viene aggiunta la ψ.*

7.4.6 Regola $\neg\forall x\,\phi$

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\,\phi \\ \downarrow \\ \exists x\neg\phi \end{array}$$

7.4.7 Regola $\neg\exists x\, \phi$

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\, \phi \\ \downarrow \\ \forall x \neg\phi \end{array}$$

A questo punto siamo pronti a 'rivisitare' il sillogismo esaminato all'inizio del corso per far vedere che il Calcolo dei Predicati del primo ordine con identità mette a nostra disposizione un algoritmo in grado di dimostrare che l'argomento espresso dal sillogismo è valido. Questo implica che il passaggio dal Calcolo Proposizionale al Calcolo dei Predicati del primo ordine con identità presenta dei notevoli vantaggi nei confronti del problema centrale del corso.

Esempio 7.4.1 *Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale.*

Interpretazione

Dominio: $\mathcal{D} = \{x \mid x \text{ è un essere vissuto in passato o attualmente vivo}\}$

Ux**:** x è un uomo

Mx**:** x è mortale

s**:** Socrate

Sequente semantico

$$\{\forall x(Ux \to Mx), Us\} \models Ms$$

Insieme controesempio

$$\{\forall x(Ux \to Mx), Us, \neg Ms\}$$

Tableau

$$\begin{array}{ccc} & \forall x(Ux \to Mx) & \\ & Us & \\ & \neg Ms & \\ & (Us \to Ms) & \\ \underline{\neg Us} & & \underline{Ms} \end{array}$$

Esempio 7.4.2 *Nessun evento precede se stesso, ogni causa precede i suoi effetti, quindi nessun evento è causa di se stesso.*

Interpretazione

Dominio: $\mathcal{D} = \{x \mid x \text{ è un evento}\}$

Pxy**:** x precede y

Cxy**:** x causa y

Sequente semantico

$$\{\neg\exists x Pxx, \forall x \forall y (Cxy \to Pxy)\} \models \neg\exists y Cyy$$

Insieme controesempio

$$\{\neg\exists x Pxx, \forall x \forall y (Cxy \to Pxy), \neg\neg\exists y Cyy\}$$

Tableau

$$\begin{array}{c}
\neg\exists x Pxx \\
\forall x \forall y (Cxy \to Pxy) \\
\neg\neg\exists y Cyy \\
\exists y Cyy \\
Caa \\
\forall x \neg Pxx \\
\neg Paa \\
\forall y (Cay \to Pay) \\
(Caa \to Paa) \\
\underline{\neg Caa} \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{Paa}
\end{array}$$

7.5 Sulla formalizzazione in $\mathcal{L}_1$ ed altre cose

Le **formule ben formate chiuse** di $\mathcal{L}_1$—e cioè le parole proprie di $\mathcal{L}_1$ che non contengono variabili individuali libere—sono il corrispondente formalizzato delle asserzioni fatte in italiano, perchè le formule ben formate chiuse di $\mathcal{L}_1$ hanno un valore di verità.

Esempio 7.5.1 *Se consideriamo il predicato ad un posto 'x è primo' (Px), dove $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, allora Px è una* ***formula aperta****, mentre $\forall x Px$ e $\exists x Px$ sono* *chiuse. È interessante notare che mentre Px non è nè vera nè falsa, $\forall xPx$ è falsa e $\exists xPx$ è vera.*

Teorema 7.5.1 (Coerenza) *Se Γ è un insieme di formule ben formate chiuse di $\mathcal{L}_1$ e ϕ è una formula ben formata chiusa di di $\mathcal{L}_1$ allora:*

$$\textit{se } \Gamma \vdash \phi \textit{ allora } \Gamma \models \phi.$$

Teorema 7.5.2 (Completezza) *Se Γ è un insieme di formule ben formate chiuse di $\mathcal{L}_1$ e ϕ è una formula ben formata chiusa di di $\mathcal{L}_1$ allora:*

$$\textit{se } \Gamma \models \phi \textit{ allora } \Gamma \vdash \phi.$$

Teorema 7.5.3 (Armonia) *Se Γ è un insieme di formule ben formate chiuse di $\mathcal{L}_1$ e ϕ è una formula ben formata chiusa di di $\mathcal{L}_1$ allora:*

$$\Gamma \models \phi \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash \phi.$$

Teorema 7.5.4 (Adeguatezza) *Se ϕ è una formula ben formata chiusa di di $\mathcal{L}_1$ allora:*

$$\models \phi \textit{ se e solo se } \vdash \phi.$$

Teorema 7.5.5 (Church) *L'insieme delle formule valide del Calcolo dei predicati del primo ordine con identità è indecidibile.*

Nota Bene 7.5.1 *:*

- *Le Σ_1-strutture sono generate dalle Interpretazioni e determinano il valore di verità delle formule chiuse interpretate.*
- *Il Calcolo dei Predicati è coerente, completo, ma, a differenza del Calcolo Proposizionale, è **indecidibile**; ciò significa che se una parola propria ϕ di $\mathcal{L}_1$ è valida allora, per il Teorema di Completezza, esiste una dimostrazione di ϕ, ma se ϕ non è valida, contrariamente a quanto avviene nel Calcolo Proposizionale, non esiste un algoritmo che in un numero finito di passi ci dica che ϕ non è valida.*

7.6 Esercizi

1. Fornite un'adeguata interpretazione del seguente argomento traducendolo in un sequente semantico del Calcolo dei Predicati. Dimostrate che il sequente semantico è corretto usando il metodo dei *tableaux*.

   Shakespeare era una persona intelligente, dal momento che tutti gli scrittori che capiscono la natura umana sono intelligenti. Dopo tutto, Shakespeare ha scritto l'*Amleto*, e nessuno tranne un vero poeta avrebbe potuto scrivere l'*Amleto*. Bisogna accettare il fatto che non esiste un vero poeta che non sia in grado di far commuovere, e nessuno scrittore che non capisce la natura umana è in grado di far commuovere.

2. Trovate dei controesempi per i seguenti sequenti semantici:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \{Fa, (\forall x\, Gx \leftrightarrow \forall x\, Hx)\} & \models & \exists x(Fx \wedge (Gx \wedge Hx)) \\ (2) & \{\exists x\,(Fx \wedge \forall y\,(Gy \to \neg x = y)), \exists x\,(\neg Fx \wedge \neg Hx)\} & \models & \neg\exists x\,(Fx \wedge Gx) \end{array}$$

3. Usando la tecnica dei *tableaux* mostrate che i seguenti sequenti sono corretti:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \{\exists x\,(\forall y\,(\neg Fy \vee Gxy) \wedge Hx), \forall x\,(Hx \to \forall y\,(Gxy \to \neg Fy))\} & \vdash & \forall x\,(Hx \to \neg Fx) \\ (2) & \{\exists x\,\neg(Fx \to \forall y\,(\neg x = y \to \neg Fy)), \exists x\,\forall y(Gy \leftrightarrow x = y)\} & \vdash & \exists x\,(Fx \wedge \neg Gx) \end{array}$$